3.2 Gráficas de ecuaciones

OBJETIVOS

- Dibujar la representación gráfica de una ecuación con 2 variables utilizando una tabla de valores.
- Encontrar las intersecciones de la gráfica de una ecuación en dos variables con los ejes coordenados.
- Utilizar los criterios de simetría de las gráficas de las ecuaciones como apoyo en la construcción de su representación gráfica.
- Encontrar la ecuación estándar de una circunferencia y dibujar su representación gráfica, a partir de su ecuación general o bien a partir de algunos de sus elementos.

Los griegos fueron los que desarrollaron la geometría de forma notable pero no avanzaron mucho en el álgebra, lo que mantuvo fuera de su alcance otros problemas matemáticos. Fue hasta en los años 1600 que matemáticos como Fermat y Descartes hicieron grandes aportes al álgebra, los cuales al ser incorporados a la geometría permitieron el desarrollo de la geometría analítica.

La gráfica de una ecuación

Las siguientes son ecuaciones de dos variables

$$y = 2x^2 - 5 \qquad\qquad x^2 + y^2 = 25 \qquad\qquad x = \frac{y}{y-1}$$

La solución de una ecuación en dos variables es el conjunto de parejas ordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación, por ejemplo las parejas ordenadas $(5,0), (3,4)$ y $(-4,3)$ son algunas de las soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$. Generalmente una ecuación en dos variables tiene un número infinito de soluciones, que al ser dibujadas en un sistema de ejes coordenados forman una representación gráfica.

GRAFICA DE UNA ECUACIÓN

La **gráfica de una ecuación** en dos variables x y y es el conjunto de todos los puntos del plano $P(x, y)$ que satisfacen la ecuación.

Para construir la gráfica de una ecuación se puede seguir el procedimiento siguiente

Procedimiento para dibujar una gráfica

1. Obtenga las coordenadas de algunos puntos.
2. Dibuje los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.
3. Trace la gráfica uniendo los puntos por una curva suave y uniforme trazada de izquierda a derecha.

Para ello asigne algunos valores arbitrarios a una de las variables, usualmente x, los cuales se sustituyen en la ecuación para obtener el correspondiente valor de y. De la elección de los valores de x depende en buena medida la calidad de la gráfica que se obtenga ya que si no se eligen adecuadamente es posible que solo obtengamos una parte de la representación gráfica.

Ejemplo 1: Grafica de una ecuación cuadrática

Dibuje la representación gráfica de la ecuación

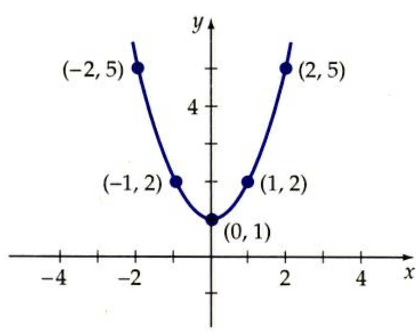
$$y = x^2 + 1$$

Solución

Para dibujar la gráfica se construye una tabla de valores, para éste problema utilizarán valores de x entre -2 y 2. En este primer ejemplo se calcula paso a paso cada uno de los valores y en la última columna se muestra el punto resultante

x	$y = x^2 + 1$	y	$P(x,y)$
2	$(-2)^2 + 1$	5	$(-2,5)$
-1	$(-1)^2 + 1$	2	$(-1,2)$
0	$(0)^2 + 1$	1	$(0,1)$
1	$(1)^2 + 1$	2	$(1,2)$
2	$(2)^2 + 1$	5	$(2,5)$

Al dibujar los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y trazar la gráfica a partir de ellos se obtiene la figura siguiente



$y = x^2 + 1$

Ejemplo 2: Gráfica de una ecuación con valor absoluto

Dibuje la representación gráfica de la ecuación

$$y = |x - 2|$$

Solución

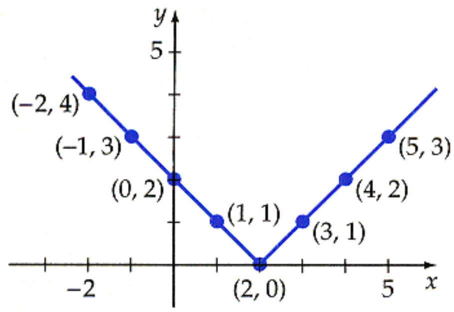
Para elegir los valores con los cuales se construirá la tabla de valores observe que cuando $x = 2$ el valor de y es igual a cero, esto sugiere que los valores a elegir deben estar alrededor de $x = 2$. Tomando valores entre -2 y 5 se tiene la tabla siguiente

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0	1	2	3

Por ejemplo, si $x = -2$, el valor de y es

$$y = |(-2) - 2| = |-2 - 2| = |-4| = 4$$

Al dibujar cada punto en el plano y trazar la gráfica se obtiene



$y = |x - 2|$

Intercepciones con los ejes de coordenadas

Los puntos donde la gráfica de una ecuación toca a los ejes de coordenadas son llamados **interceptos**. Estos puntos tienen la característica que x o y tienen valor de cero.

INTERCEPTOS DE UNA GRAFICA

El punto $(a,0)$ es llamado intercepción con el eje x si al sustituir $x = a$ y $y = 0$ en la ecuación se obtiene un resultado verdadero.

El punto $(0,b)$ es llamado intercepción con el eje y si al sustituir $x = 0$ y $y = b$ en la ecuación se obtiene un resultado verdadero.

Para encontrar las intercepciones con el eje x se sustituye $y = 0$ en la ecuación y se resuelve la misma. Para encontrar las intercepciones con el eje y se sustituye $x = 0$ y se resuelve la ecuación resultante.

Ejemplo 3: Encontrando los interceptos con los ejes de coordenadas

Encuentre las intercepciones con los ejes de coordenadas y dibuje la gráfica de la ecuación

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Solución

Para encontrar las intercepciones con el eje y se sustituye $x = 0$ y se despeja y

$$y = (0)^2 - 2(0) - 3$$

$$y = -3$$

De donde el intercepto con el eje y es $(0,-3)$

Para encontrar las intercepciones con el eje x se sustituye $y = 0$ y se despeja x

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{o} \qquad x = -1$$

Por lo que la gráfica intercepta al eje x en los puntos $(-1,0)$ y $(3,0)$

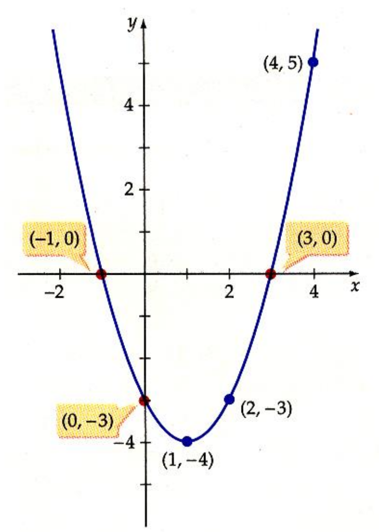
Construyendo una tabla de valores para algunos puntos adicionales se puede dibujar la gráfica de la ecuación

x	-1	0	1	2	3	4
y	0	-3	-4	-3	0	5

Por ejemplo para $x = 4$ se tiene

$$y = (4)^2 - 2(4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$$

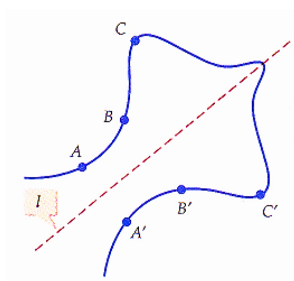
La figura siguiente muestra la gráfica de la ecuación. En color rojo se indican los interceptos con los ejes de coordenadas



$y = x^2 - 2x - 3$

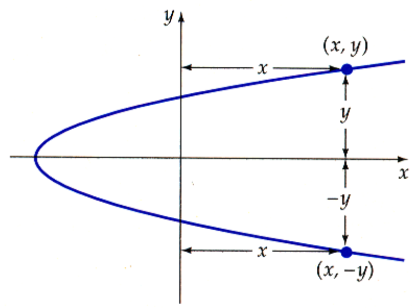
Simetría de una gráfica

La siguiente figura muestra una gráfica que es simétrica con respecto a la línea l.

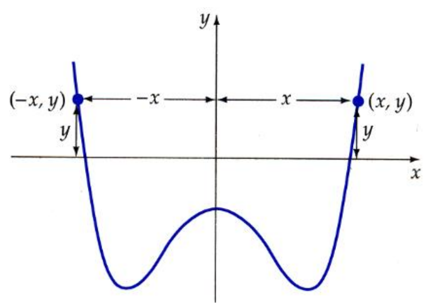


La gráfica tiene la característica que al ser doblada sobre la línea l, el punto A coincidirá con el punto A', el punto B coincidirá con el punto B' y el punto C con el punto C'. Es decir que la parte a un lado de la línea l es el reflejo de la parte al otro lado de la línea l. La línea l recibe el nombre de **eje de simetría**.

Una gráfica es **simétrica con respecto al eje x**, si cuando el punto (x, y) está en la gráfica, entonces el punto $(x, -y)$ también está en la gráfica, la siguiente figura muestra una gráfica simétrica con respecto al eje x.



Una gráfica es **simétrica con respecto al eje y**, si cuando el punto (x, y) está en la gráfica, entonces el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica, la siguiente figura muestra una gráfica simétrica con respecto al eje x.

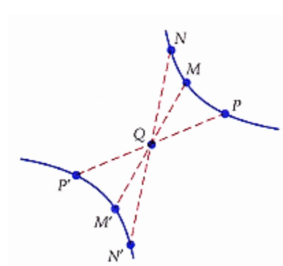


Pruebas de simetría con respecto a los ejes

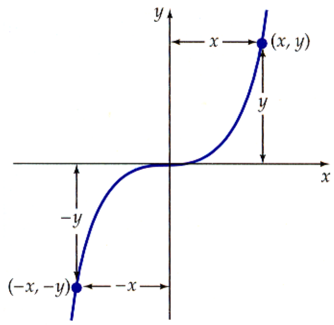
1. La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje x si al reemplazar y por $-y$ se obtiene la misma ecuación.
2. La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y si al reemplazar x por $-x$ se obtiene la misma ecuación.

La simetría de una gráfica también se puede estudiar con respecto a un punto, como se indica en la siguiente definición

Una gráfica es simétrica respecto a un punto Q si para cada punto P en la gráfica, existe un punto P' en la gráfica, tal que el punto Q es el punto medio del segmento PP'. La siguiente figura muestra una gráfica simétrica respecto al punto Q



Cuando se estudia la simetría con respecto a un punto, con frecuencia el punto es el origen del sistema de coordenadas. Una gráfica es simétrica con respecto al origen si para todo punto (x, y) que está en la gráfica, el punto $(-x, -y)$ también se encuentre en la gráfica. La siguiente figura muestra una gráfica simétrica respecto al origen.



Prueba de simetría con respecto al origen

La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al origen si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene la misma ecuación.

Ejemplo 4: Análisis de la simetría de una gráfica

Analice la simetría de la ecuación dada con respecto a los ejes de coordenadas y con respecto al origen. Dibuje la gráfica de la ecuación.

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

Solución

Para determinar si la gráfica es simétrica con respecto al eje x se sustituye y por $-y$ en la ecuación dada

$$(-y) = \sqrt{9 - x^2}$$
$$-y = \sqrt{9 - x^2}$$

Como la ecuación resultante no es la misma que la ecuación dada se concluye que la gráfica no es simétrica con respecto al eje x.

Para determinar si la gráfica es simétrica con respecto al eje y se sustituye x por $-x$ en la ecuación dada

$$y = \sqrt{9 - (-x)^2}$$
$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

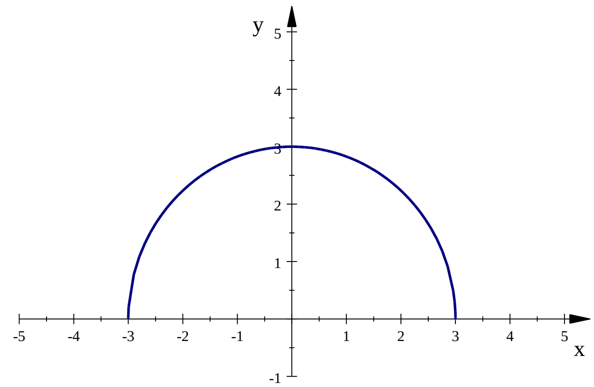
Como la ecuación resultante es la misma que la ecuación dada se concluye que la gráfica si es simétrica con respecto al eje y.

Para determinar si la gráfica es simétrica con respecto al origen se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación

$$(-y) = \sqrt{9 - (-x)^2}$$
$$-y = \sqrt{9 - x^2}$$

Como la ecuación resultante no es la misma que la ecuación dada se concluye que la gráfica no es simétrica con respecto al origen.

La figura siguiente muestra la gráfica de la ecuación donde puede observarse que es simétrica únicamente con respecto al eje y



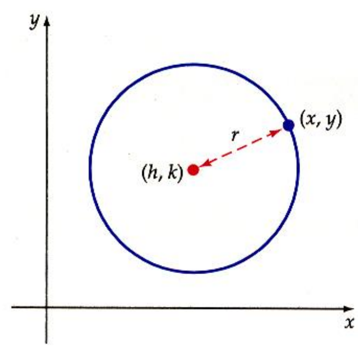
La circunferencia

Cuando vemos una ecuación de dos variables, es frecuente que la reconozcamos y la podamos graficar fácilmente. Una de las ecuaciones que se utiliza frecuentemente es la de la circunferencia

Definición de circunferencia

Una circunferencia se define como el conjunto de los puntos del plano que se encuentran a una misma distancia de un punto fijo. La distancia se llama **radio** y el punto fijo se llama **centro**.

Para obtener la ecuación de la circunferencia considere la figura siguiente



Si r es el radio, el punto $C(h,k)$ es el centro y $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la circunferencia se tiene que la distancia de P a C es igual al radio, es decir

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Elevando ambos lados al cuadrado se obtiene la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

La **ecuación estándar de la circunferencia** con centro en el punto $C(h,k)$ y radio r es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Al desarrollar cuadrados en la ecuación anterior se obtiene la **ecuación general de la circunferencia**

$$x^2+y^2+Cx+Dy+F=0$$

donde C, D, y F son constantes.

Si la circunferencia tiene centro en el origen entonces $(h,k)=(0,0)$ y la ecuación se reduce a

$$x^2+y^2=r^2$$

Ejemplo 5: Gráfica de la mitad de una circunferencia

Dibuje la gráfica de la ecuación

$$x=-\sqrt{16-y^2}$$

Solución

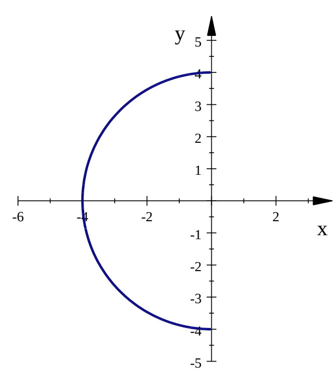
Observe que al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación dada se obtiene la ecuación de una circunferencia

$$x=-\sqrt{16-y^2}$$
$$x^2=\left(-\sqrt{16-y^2}\right)^2$$
$$x^2=16-y^2$$
$$x^2+y^2=16$$

La circunferencia tiene centro en el origen y radio 4. Al despejar x se obtiene

$$x=\pm\sqrt{16-y^2}$$

La raíz positiva corresponde a la mitad derecha de la circunferencia, mientras que la raíz negativa corresponde a la mitad izquierda de la circunferencia. Por lo que la gráfica solicitada es.



El lector puede asignar algunos valores a y, y construir una tabla de valores para verificar que la gráfica es la correcta.

Ejemplo 6: Ecuación estándar de una circunferencia

Encuentre la ecuación estándar, la ecuación general y dibuje la gráfica de la circunferencia que tiene centro en el punto $(1,-3)$ y que pasa por el punto $(4,-1)$

Solución

Hay que encontrar una ecuación de la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, en donde (h,k) es el centro. De los datos se tiene que $h=1$ y $k=-3$. Para obtener el radio se debe calcular la distancia del punto $(4,-1)$ al centro

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$r=\sqrt{(4-1)^2+((-1)-(-3))^2}$$

$$r=\sqrt{(3)^2+(2)^2}$$

$$r=\sqrt{13}$$

Sustituyendo los datos en la forma estándar de la ecuación se obtiene

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-1)^2+(y-(-3))^2=\left(\sqrt{13}\right)^2$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2=13$$

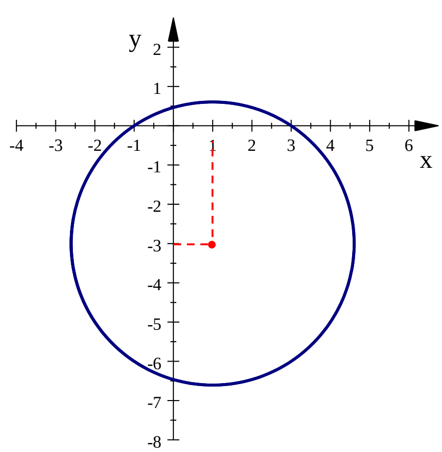
Que es la ecuación estándar de la circunferencia. Al desarrollar los binomios se obtiene la ecuación general

$$(x-1)^2+(y+3)^2=13$$

$$x^2-2x+1+y^2+6y+9=13$$

$$x^2+y^2-2x+6y-3=0$$

La Gráfica de la ecuación se muestra en la figura siguiente, la cual ha sido elaborada con el programa Scientific Notebook.



Ejemplo 7: Completando cuadrados para hallar la ecuación estándar de una circunferencia

Encuentre el centro, el radio y dibuje la gráfica de la circunferencia cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 56 = 0$$

Solución

Para encontrar la ecuación estándar a partir de la ecuación general hay completar cuadrados.

El primer paso es agrupar los términos con la misma variable y trasladar la constante al lado derecho

$$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 56 = 0$$

$$(x^2 - 14x) + (y^2 + 8y) = -56$$

Para completar cuadrados se debe sumar la mitad del coeficiente del segundo término elevado al cuadrado, teniendo el cuidado de sumar ésta cantidad en ambos lados de la ecuación

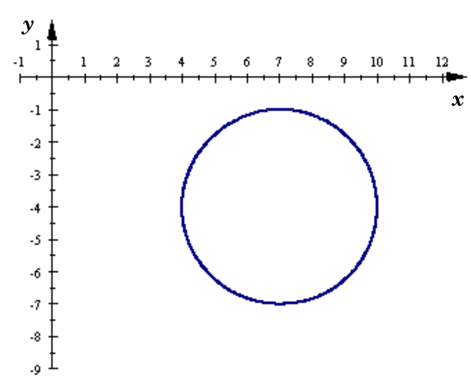
$$(x^2 - 14x + 49) + (y^2 + 8y + 16) = -56 + 49 + 16$$

Ahora se factorizan los dos trinomios cuadrados perfectos para obtener la ecuación estándar de la circunferencia

$(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 9$

De donde se obtiene que el centro está en el punto $(h,k) = (7,-4)$ y el radio es $r = \sqrt{9} = 3$

La gráfica se muestra en la figura siguiente



Ejercicios de la sección 3.2

En los ejercicios 1 a 10 dibuje la gráfica de la ecuación utilizando una tabla de valores.

1. $x + y = 6$

2. $y = 0.5x^2$

3. $y = 4 - x^2$

4. $y = 2(x + 2)^2$

5. $y = 2|x - 2|$

6. $y = |x + 2| - 3$

7. $x = 2y - 3$

8. $x = y^3$

9. $x = \sqrt{y - 1}$

10. $y = -\sqrt{4 - x^2}$

En los ejercicios 11 a 15 encuentre los interceptos con los ejes de coordenadas y dibuje la gráfica de la ecuación.

11. $2x + 6y = 12$

12. $y = -x^2 + 4$

13. $x = 2y^2 - 6$

14. $x^2 + y^2 = 16$

15. $|x| + |y| = 9$

En los ejercicios 16 a 20, determine si las gráficas de las ecuaciones dadas son: (a) simétricas respecto al eje *x,* (b) respecto al eje *y,* (c) respecto al origen.

16. $y = 2x^2 - 5$

17. $x^2 = y^4$

18. $x^2 - y^2 = 9$

19. $2x^2 + 4y^2 = 1$

20. $xy = 4$

21. $y = \dfrac{x}{|x|}$

22. $|x| - |y| = 4$

23. $x = y - |y|$

24. $y = \sqrt{x - 5}$

25. $y = x^3 - x$

En los ejercicios 26 a 35 encuentre la ecuación estándar de la circunferencia que satisface las condiciones dadas y dibuje su gráfica.

26. Centro $(5,-3)$ radio $r = 3$

27. Centro $(\frac{2}{3},0)$ radio $r = 2\sqrt{2}$

28. Centro en $(0,0)$ pasando por el punto $(-3,4)$

29. Centro en $(1,3)$ pasando por el punto $(4,-1)$

30. Centro en $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ radio $r = 3\sqrt{2}$

31. Centro en $(1,3)$, tangente al eje x

32. Centro en $(1,3)$, tangente al eje y

33. Centro en $(-3,3)$, tangente a ambos ejes

34. Extremos de un diámetro en los puntos $(0,0)$ y $(-3,4)$

35. Extremos de un diámetro en los puntos $(2,-5)$ y $(6,3)$

En los ejercicios 36 a45 encuentre el centro, el radio y dibuje la gráfica de la circunferencia cuya ecuación general está dada.

36. $x^2 + y^2 - 16 = 0$

37. $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

38. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$

39. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$

40. $x^2 + y^2 - 14x + 8y + 56 = 0$

41. $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 25 = 0$

42. $4x^2 + 4y^2 + 4y - 63 = 0$

43. $9x^2 + 9y^2 - 6x - 17 = 0$

44. $3x^2 + 3y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$

45. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y + 7 = 0$

46. Encuentre una ecuación de la circunferencia tangente a ambos ejes de coordenadas, con centro en el tercer cuadrante y radio 3.

47. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(-3,2)$ y que pasa por el punto $(4,3)$.

48. Encuentre la ecuación de la circunferencia de radio 5, con centro en el primer cuadrante y que pasa por los puntos $(3,0)$ y $(0,1)$.

49. Una banda encaja perfectamente alrededor de dos circunferencias cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 11$ y $x^2 + y^2 - 14x - 12y = -69$. Encuentre la longitud de la banda.