3.1 Sistema de coordenadas rectangulares

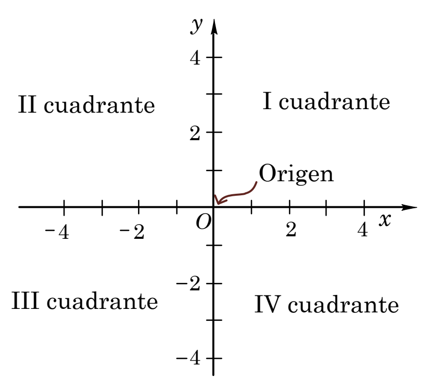
OBJETIVOS

- Representar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Utilizar la fórmula de distancia entre puntos para calcular la distancia entre dos puntos.
- Utilizar la fórmula del punto medio para encontrar el punto medio de dos puntos.
- Utilizare las fórmulas de punto medio y distancia para resolver problemas de geometría analítica en el plano de coordenadas.

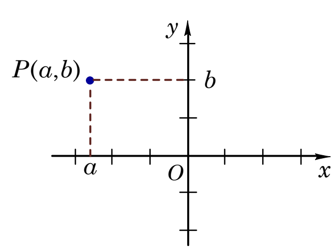
La idea de sistema de coordenadas rectangulares fue creada alrededor del año 1600 en forma independiente por dos matemáticos franceses; Pierre de Fermat, un abogado aficionado a las matemáticas y por René Descartes. Un filósofo muy estudioso de las matemáticas. Las coordenadas se conocen como coordenadas cartesianas debido a René Descartes.

Sistema de coordenadas cartesianas

Un sistema de coordenadas cartesianas está formado por dos rectas numéricas, llamadas **ejes coordenados;** Se intersectan perpendicularmente en un punto llamado **origen**. Al eje coordenado horizontal se le llama **eje *x*** y al eje coordenado vertical se le llama **eje *y*.** Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**; estos son llamados primer cuadrante, segundo cuadrante, tercer cuadrante y cuarto cuadrante y se identifican con números romanos como se muestra en la figura siguiente



A cada punto P del plano, se le asigna una pareja (a,b) que son sus coordenadas. En número a se llama **coordenada en *x*** (o **abscisa**); el número b es la **coordenada en *y*** (u **ordenada**). La coordenada en x es la distancia perpendicular del punto P al eje y, es positiva si el punto está en el I o IV cuadrante y es negativa si el punto está en el II o III cuadrante. La coordenada y es la distancia perpendicular del punto al eje x y es positiva si el punto está en el I o II cuadrante y es negativa si el punto está en el III o IV cuadrante. La siguiente figura muestra un punto $P(a,b)$ en el segundo cuadrante.



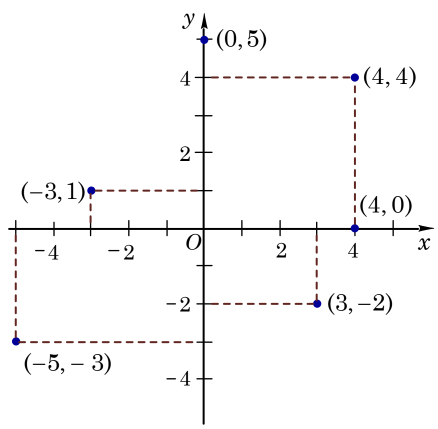
Ejemplo 1: Dibujando puntos en un sistema de coordenadas

Dibuje e identifique en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos

$$(-3,1),\quad (0,5),\quad (3,-2)\quad (4,4)\quad (-5,-3),\quad (4,0)$$

Solución

En la siguiente figura se muestran los pontos y su ubicación en el sistema de coordenadas cartesianas



Fórmula de la distancia y del punto medio

Al combinar los conceptos de Geometría y Álgebra en un sistema de coordenadas cartesianas se da origen a una rama de las matemáticas llamada Geometría Analítica. Dos conceptos fundamentales son los de distancia entre dos puntos y el de punto medio.

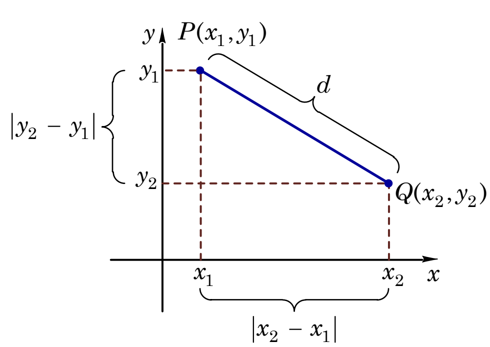
La distancia entre dos puntos que se encuentran sobre una recta paralela al eje x es el valor absoluto de la diferencia entre las dos coordenadas en x, es decir

$$d = |x_2 - x_1|$$

La distancia entre dos puntos sobre una recta paralela al eje y, es el valor absoluto de la diferencia entre las coordenadas en y, es decir

$$d = |y_2 - y_1|$$

Si dos puntos no se encuentran en una recta horizontal o en una recta vertical, para calcular la distancia entre ellos se debe utilizar la fórmula de distancia. La figura siguiente muestra cómo se utiliza el teorema de Pitágoras para obtener la fórmula



Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo

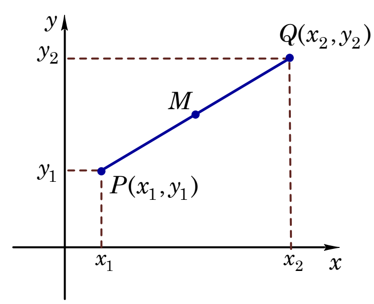
$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

DEFINICIÓN DE LA DISTANCIA

La distancia d entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ en un sistema de coordenadas rectangulares es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

El punto medio M de un segmento es el punto en el segmento que es equidistante de los puntos extremos del segmento P y Q, como se muestra en la figura



FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

El punto medio M del segmento de recta del punto $P(x_1, y_1)$ al punto $Q(x_2, y_2)$ está dado por

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 2: Calculando la distancia y el punto medio entre dos puntos

Dados los puntos del plano $A(-3,5)$ y $B(2,1)$

- **a.** Dibuje los puntos en un sistema de coordenadas, dibuje el segmento entre ellos y muestre un punto que indique el punto medio.
- **b.** Calcule la distancia entre los puntos.
- **c.** Encuentre las coordenadas del punto medio.

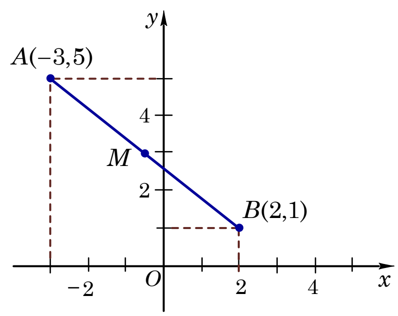
Solución

- **a.** En la figura de abajo se muestran los puntos A y B, el segmento determinado por ellos y la ubicación aproximada del punto medio.
- **b.** Al utilizar la fórmula de distancia no importa el orden en que tomen los puntos ya que la distancia de A a B es la misma que la distancia de B a A. La distancia entre los puntos es

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (1-5)^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25+16} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

c. De igual forma que la fórmula de distancia, en la fórmula del punto medio no importa el orden en que se consideren los puntos. Las coordenadas del punto medio son

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2+(-3)}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{2}, \frac{6}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 3\right) \end{aligned}$$

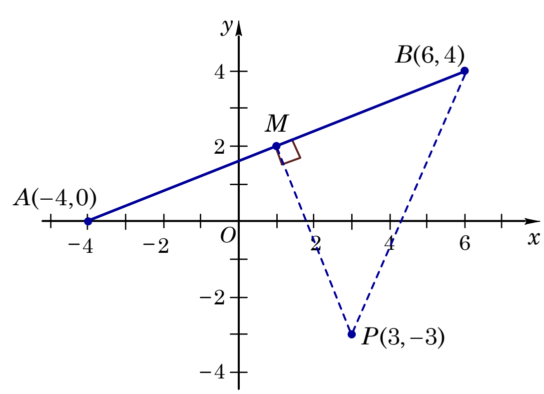


Ejemplo 3: La mediatriz de un segmento

Demuestre que el punto $P(3,-3)$ está localizado en la mediatriz del segmento de recta que une los puntos $A(-4,0)$ y

Solución

Para resolver este problema y otros similares el estudiante debe leerlo y comprenderlo claramente, para ello se requiere que conozca las definiciones geométricas que se mencionan. En éste caso particular la mediatriz del segmento AB es un segmento CD que pasa por el punto medio de AB y es perpendicular AB. La figura siguiente muestra la situación descrita



Las coordenadas del punto medio M del segmento AB son

$$M = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (1,2)$$

Ahora se debe demostrar que el segmento MP es perpendicular al segmento AB. Por el momento, la única forma de hacerlo es demostrando que el triángulo PMB es rectángulo; ya que si es rectángulo tiene un ángulo de 90º. Calculando la longitud de cada cateto se tiene

$$MB = \sqrt{(6-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$MP = \sqrt{(3-1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

La longitud de la hipotenusa es

$$PB = \sqrt{(3-6)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

Ahora se debe comprobar si se cumple el teorema de Pitágoras

$$(MB)^2 + (MP)^2 = (PB)^2$$

$$\left(\sqrt{29}\right)^2 + \left(\sqrt{29}\right)^2 = \left(\sqrt{58}\right)^2$$

$$29 + 29 = 58$$

$$58 = 58$$

Como los lados del triángulo satisfacen el teorema de Pitágoras, el triángulo es rectángulo y por lo tanto los segmentos AB y MP son perpendiculares. De donde se concluye que el punto P si está en la mediatriz del segmento AB.

Ejercicios de la sección 3.1

En los ejercicios 1 a 2 dibuje los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.

1. $A(-4,2)$, $B(-3,-6)$, $C(0,-5)$, $D(1,-4)$

2. $A\left(-1,\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{3}\right)$, $C(1,-3)$, $D\left(\frac{4}{3},-1\right)$

En los ejercicios 3 a 10 dibuje los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y encuentre la distancia entre ellos.

3. $(-4,2)$, $(-3,-6)$

4. $(6,4)$, $(-8,11)$

5. $(0,0)$, $(-5,4)$

6. $\left(\sqrt{3},\sqrt{8}\right)$, $\left(\sqrt{12},-\sqrt{27}\right)$

7. $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{3}\right)$

8. (a,b), $(-a,-b)$

9. $(a-b,b)$, $(a,a+b)$

10. $(x,4x)$, $(-2x,3x)$

En los ejercicios 11 a 15 dibuje los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y encuentre el punto medio y muéstrelo en la gráfica.

11. $(1,-1)$, $(-2,3)$

12. $(1,-1)$, $(5,5)$

13. $(4,7)$, $(-10,7)$

14. $\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\left(\frac{5}{2},-\frac{2}{5}\right)$

15. $(0,2)$, $\left(a,a^2\right)$

16. Encuentre las coordenadas del punto localizado 3 unidades a la derecha y 5 unidades hacia abajo del punto $(0,-2)$.

17. Encuentre todas las coordenadas de los puntos que estén a 6 unidades a la derecha y a 10 unidades de distancia total del punto $(4,0)$.

18. Encuentre los puntos sobre el eje x que estén a 10 unidades de distancia del punto $(4,6)$.

19. Encuentre los puntos sobre el eje y que se encuentran a 12 unidades de distancia del punto $(5,-3)$.

20. ¿Cuál de los puntos $A(6,-3)$ y $B(-3,0)$ está más cerca del punto $C(2,-1)$.

21. Trace el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,-3)$, $B(6,-3)$, $C(6,2)$ y calcule su área.

22. Trace el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,4)$, $B(1,2)$, $C(-5,-1)$ y determine si es un triángulo rectángulo. Calcule su área.

23. Trace el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3,2)$, $B(9,4)$, $C(7,-2)$ y demuestre que es un triángulo isósceles. Encuentre la mediatriz del segmento desigual y como en el ejemplo 3 y úsela para calcular el área del triángulo.

25. Dibuje los puntos $A(-1,5)$, $B(-6,0)$, $C(-1,-5)$ Encuentre las coordenadas del punto D de tal forma que el cuadrilátero $ABCD$ sea un cuadrado. Calcule su área.

26. Dibuje el triángulo que tiene vértices en los puntos $A(1,-3)$, $B(6,-3)$, $C(6,2)$. Encuentre las coordenadas del triángulo resultante al desplazar el triángulo anterior 2 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo.

27. Utilice la fórmula de distancia entre puntos para mostrar que los tres puntos $A(-4,-1)$, $B(-1,5)$, $C(5,13)$ están en una línea recta.

28. Las ciudades A, B y C están localizadas en los puntos $A(0,0)$, $B(214,17)$, $C(230,179)$, con las distancias en kilómetros. Hay carreteras rectas entre A y B y entre B y C, pero sólo una ruta aérea de A a C. Cuesta Q30 enviar un paquete por tierra y Q40 enviar un paquete vía aérea. Calcule la forma más barata para enviar un paquete de B a C y calcule el dinero que se ahorra al enviarlo por esta vía y no por la otra.

29. Considere el triángulo cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,4)$. Encuentre la longitud de la altura que va del punto A al lado BC.

30. Un triángulo rectángulo tiene vértices en los puntos $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(0,b)$. Muestre que el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo ABC tiene área igual a la cuarta parte del área del triángulo original.