

PROBLEMA RESUELTO 1

Dadas las funciones $f(x) = 4 - 2x - x^2$ y $g(x) = \frac{x^2}{x-2}$, evalúe y simplifique

- a. $f(a+1)$ b. $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ c. $\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$

Solución

- a. En este caso la función es $f(x) = 4 - 2x - x^2$. Evaluando la función en $a+1$ se tiene

$$\begin{aligned} f(a+1) &= 4 - 2(a+1) - (a+1)^2 \\ &= 4 - 2a - 2 - (a^2 + 2a + 1) \\ &= 2 - 2a - a^2 - 2a - 1 \\ &= 1 - 4a - a^2 \end{aligned}$$

- b. En este caso la función es $f(x) = 4 - 2x - x^2$.

Evaluando la función en a

$$f(a) = 4 - 2(a) - (a)^2$$

Evaluando la función en $a+h$ se tiene

$$f(a+h) = 4 - 2(a+h) - (a+h)^2$$

Restando las dos expresiones, dividiendo entre h y simplificando

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{[4 - 2(a+h) - (a+h)^2] - [4 - 2a - a^2]}{h} \\ &= \frac{4 - 2a - 2h - a^2 - 2ah - h^2 - 4 + 2a + a^2}{h} \\ &= \frac{-2h - 2ah - h^2}{h} = \frac{h(-2 - 2a - h)}{h} \\ &= -2 - 2a - h \end{aligned}$$

- c. Evaluando la función g en x y en $x+h$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2}{x-2} \\ g(x+h) &= \frac{(x+h)^2}{(x+h)-2} \end{aligned}$$

Restando las dos expresiones, dividiendo entre h y simplificando

$$\begin{aligned}
 \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{\frac{(x+h)^2}{(x+h)-2} - \frac{x^2}{x-2}}{h} = \frac{\frac{x^2 + 2xh + h^2}{x+h-2} - \frac{x^2}{x-2}}{h} \\
 &= \frac{\frac{(x^2 + 2xh + h^2)(x-2) - x^2(x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)}}{\frac{h}{1}}
 \end{aligned}$$

Efectuando el producto de extremos y medios

$$\begin{aligned}
 \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{x^3 + 2x^2h + h^2x - 2x^2 - 4xh - 2h^2 - x^3 - x^2h + 2x^2}{h(x+h-2)(x-2)} \\
 &= \frac{x^2h + h^2x - 4xh - 2h^2}{h(x+h-2)(x-2)} \\
 &= \frac{h(x^2 + hx - 4x - 2h)}{h(x+h-2)(x-2)} \\
 &= \frac{x^2 + hx - 4x - 2h}{(x+h-2)(x-2)}
 \end{aligned}$$
