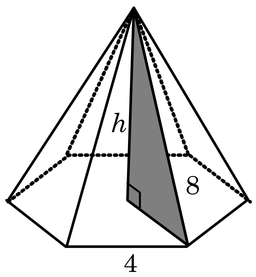
PROBLEMA RESUELTO 8

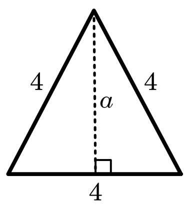
La arista lateral de una pirámide regular mide 8 cm. La base es un hexágono regular de lado 4 cm. Encontrar el área total y el volumen de la pirámide.

Solución

En la figura se muestra la pirámide hexagonal, Observe que la arista lateral, la altura h y el radio del hexágono forman un triángulo rectángulo, el cual se muestra sombreado en la figura



La base es un hexágono de lado 4 cm, para obtener el área del polígono es necesario calcular su apotema. Como en un hexágono se forman 6 triángulos equiláteros se tiene

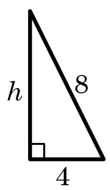


$$\begin{aligned} 4^2 &= a^2 + 2^2 \\ a &= \sqrt{16-4} \\ &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

El área de la base de la pirámide es

$$B = 6\left(\frac{1}{2}(4)\left(2\sqrt{3}\right)\right) = 24\sqrt{3}$$

Para calcular la altura de la pirámide, nuevamente se utiliza el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa la arista de longitud 8

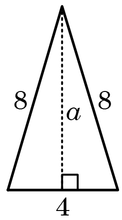


$$\begin{aligned} h^2 + 4^4 &= 8^2 \\ h &= \sqrt{64-16} \\ &= \sqrt{48} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Entonces el volumen de la Pirámide es

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\left(24\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}\right) = (32)(3) = 96\ \text{cm}^3$$

Para obtener el área lateral primero hay que calcular el área de una de las caras. La altura a de la cara lateral es



$$a = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60}$$
$$= 2\sqrt{15}$$

Entonces el área de una cara lateral es

$$A = \frac{1}{2}(4)\left(2\sqrt{15}\right) = 4\sqrt{15}$$

El área lateral de la pirámide es

$$A.L. = 6A = 6\left(4\sqrt{15}\right) = 24\sqrt{15}$$

Respuesta:

El volumen es $V = 96 \text{ cm}^3$

El área total es la suma del área de la base más el área lateral

$$A = 24\sqrt{15} + 24\sqrt{3} = 24(\sqrt{15} + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$$