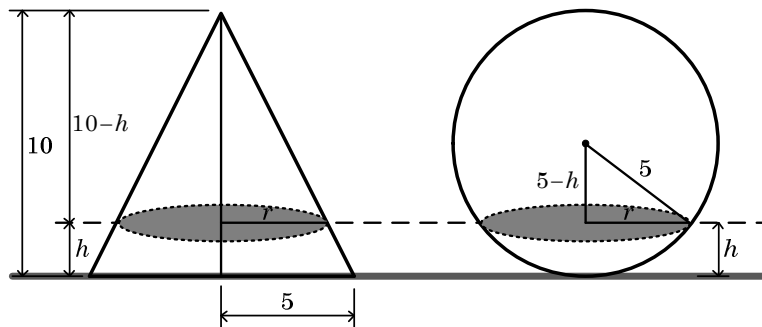


PROBLEMA RESUELTO 7

Una esfera de radio 5 cm y un cono de radio 5 cm y altura 10 cm, se encuentran colocados sobre una superficie plana. Se desea trazar un plano paralelo a la superficie de manera que de sus intersecciones con los dos sólidos resulten círculos iguales. ¿A qué distancia de la superficie debe quedar el plano?

Solución

Al trazar un plano a una altura h de la superficie sobre la cual descansan los dos sólidos, como se muestra en la figura, se forman dos círculos de radios iguales r .



La idea es expresar r en términos de h , tanto en el cono como en la esfera. Como los radios de los círculos son iguales, se puede establecer una ecuación en términos de h , igualando el radio del cono con el radio de la esfera.

En el cono se forman dos triángulos semejantes, en donde

$$\frac{10-h}{10} = \frac{r}{5}$$
$$r = \frac{10-h}{2}$$

En la esfera se forma un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa es el radio de la esfera y uno de los catetos es el radio del círculo, entonces

$$r^2 + (5-h)^2 = 5^2$$
$$r^2 = 25 - (5-h)^2$$
$$r^2 = 25 - 25 + 10h - h^2$$
$$r = \sqrt{10h - h^2}$$

Igualando los radios ya que éstos son iguales

$$\sqrt{10h - h^2} = \frac{10-h}{2}$$

Al resolver la ecuación anterior se obtendrá la altura h

$$10h - h^2 = \left(\frac{10-h}{2}\right)^2$$

$$10h - h^2 = \frac{100 - 20h + h^2}{4}$$

$$40h - 4h^2 = 100 - 20h + h^2$$

$$5h^2 - 60h + 100 = 0$$

$$h^2 - 12h + 20 = 0$$

$$(h - 10)(h - 2) = 0$$

Las soluciones de la ecuación anterior son $h = 10$ y $h = 2$. Como puede comprobarse los dos valores de h resuelven el problema, ya que si $h = 10$ se obtienen dos círculos iguales de radio $r = 0$, mientras que cuando $h = 2$ se obtienen dos círculos iguales de radio $r = 4$.

Respuesta:

El plano debe pasar a una altura $h = 2$

