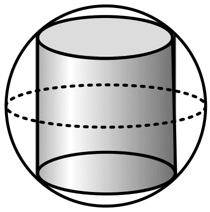
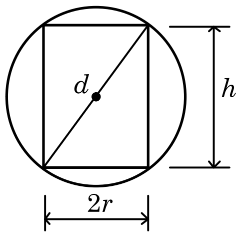
PROBLEMA RESUELTO 4

Se inscribe un cilindro circular recto dentro de una esfera de radio 8 cm, como se muestra en la figura. Si la altura del cilindro es el doble de su diámetro, calcule el volumen del cilindro.



Solución

Para establecer las relaciones entre la altura y el radio del cilindro con el radio de la esfera, es recomendable hacer una gráfica de una sección transversal del sólido, en donde se vean los datos involucrados.



En la figura de arriba d es el diámetro de la esfera, h es la altura del cilindro y $2r$ es el diámetro del cilindro. Como el triángulo formado por estos segmentos es rectángulo, al utilizar el teorema de Pitágoras se tiene

$$d^2 = (2r)^2 + h^2$$
$$(16)^2 = 4r^2 + h^2$$

Como la altura del cilindro es el doble de su diámetro, entonces

$$h = 2(2r) = 4r$$

Sustituyendo h y despejando r

$$16^2 = 4r^2 + (4r)^2$$
$$256 = 4r^2 + 16r^2$$
$$256 = 20r^2$$

Por lo que el radio del cilindro es

$$r = \sqrt{\frac{256}{20}} = \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Y la altura del cilindro es

$$h = 4r = 4\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{32\sqrt{5}}{5}$$

Ahora ya se puede calcular el volumen del cilindro

$$V = \left(\pi r^2\right)h = \pi\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2\left(\frac{32\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{(64)(5)(32)\pi\sqrt{5}}{(25)(5)} = \frac{2048\pi\sqrt{5}}{25} \approx 575.47\,\mathrm{cm}^3$$

Repuesta:

El volumen del cilindro es $V = \dfrac{2048\pi\sqrt{5}}{25} \approx 575.47$