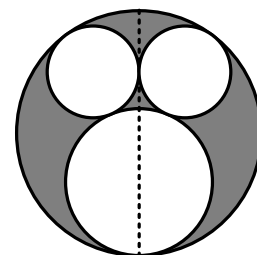


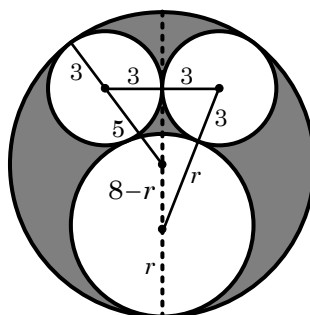
PROBLEMA RESUELTO 3

La figura muestra una circunferencia de 8 centímetros de radio que tiene inscritas tres circunferencias. Las dos circunferencias pequeñas tienen radio de 3 centímetros y son tangentes interiormente a la circunferencia mayor y al diámetro mostrado con línea discontinua. La otra circunferencia tiene radio desconocido y es tangente a las dos circunferencias pequeñas y a la circunferencia mayor. Encuentre el área sombreada.

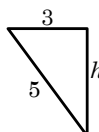


Solución

En la siguiente figura se han trazado algunos segmentos que muestran las relaciones entre los radios de las circunferencias.



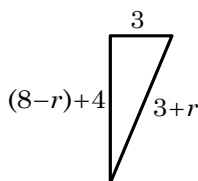
Note que se forman dos triángulos rectángulos, en el triángulo pequeño, el cateto menor mide 3 cm y la hipotenusa mide 5 cm pues es la diferencia entre el radio mayor 8 y el radio menor 3. Al calcular el cateto mayor de este triángulo se obtiene



$$3^2 + h^2 = 5^2$$

$$h = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Al utilizar el teorema de Pitágoras en el otro triángulo rectángulo se tiene



$$[(8 - r) + 4]^2 + (3)^2 = (3 + r)^2$$

Resolviendo la ecuación anterior para r

$$\begin{aligned}(8-r)^2 + 8(8-r) + 16 + 9 &= 9 + 6r + r^2 \\ 64 - 16r + r^2 + 64 - 8r + 16 &= 6r + r^2 \\ 144 - 24r &= 6r \\ 30r &= 144 \\ r &= \frac{144}{30} = \frac{24}{5}\end{aligned}$$

El área sombreada en la figura es

$$\begin{aligned}A_s &= \pi(8)^2 - 2\pi(3)^2 - \pi\left(\frac{24}{5}\right)^2 = 64\pi - 18\pi - \frac{576}{25}\pi \\ &= \frac{574}{25}\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Respuesta:

$$\text{El Área sombreada es } \frac{574}{25}\pi \text{ cm}^2$$
