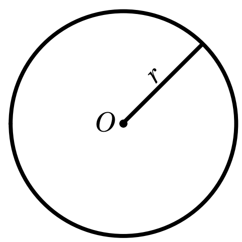
2.4 La circunferencia y el círculo

OBJETIVOS

- Calcular el área del círculo y el perímetro de la circunferencia.
- Calcular el área y el perímetro de sectores y segmentos circulares.
- Calcular la medida de ángulos y arcos en la circunferencia.
- Resolver problemas de áreas y perímetros en los cuales están relacionadas varias figuras geométricas.

Definición

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos en un mismo plano, que están a una distancia dada, de un punto dado, situado en el mismo plano. El punto dado se llama **centro** de la circunferencia. El **círculo** es el conjunto de todos los puntos interiores a una circunferencia. El **radio** es el segmento que une el centro con cualquiera de los puntos de la circunferencia. La figura siguiente muestra una circunferencia de radio r y centro en el punto O.



Algunos elementos en la circunferencia

Algunos de los elementos geométricos que se relacionan con la circunferencia son

Cuerda:

Es un segmento cuyos puntos extremos están sobre la circunferencia. En la figura de abajo los segmentos AB y CD son cuerdas.

Diámetro:

Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. En la figura AB es un diámetro.

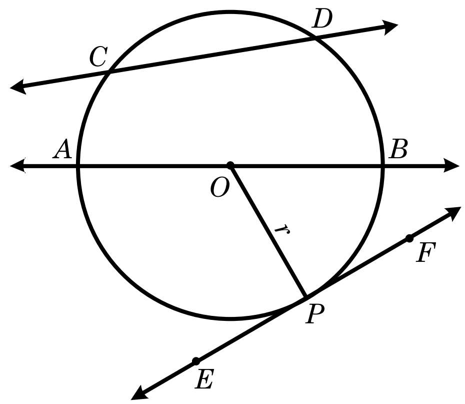
Secante:

Es una recta que contiene a una cuerda. En la figura las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son secantes.

Tangente:

Es una recta que se encuentra en el mismo plano que la circunferencia y que la interseca solamente en un punto. El punto de intersección se llama punto de tangencia. Una recta tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

En la figura la recta $\overleftrightarrow{EF}$ es tangente a la circunferencia en el punto P, por lo tanto el radio OP es perpendicular a la recta tangente en P.



Área y perímetro

Las expresiones para calcular el área del círculo y el perímetro de la circunferencia son

$$A = \pi r^2$$

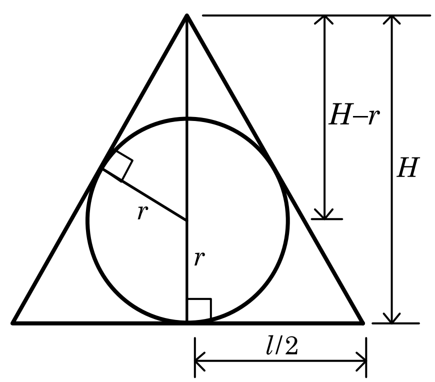
$$P = 2\pi r$$

Ejemplo 1: Círculo inscrito en triángulo equilátero

Encuentre el área de un círculo inscrito en un triángulo equilátero de lado 6 cm.

Solución

La figura muestra el círculo inscrito en el triángulo equilátero, donde l es el lado del triángulo, H es la altura del triángulo y r es el radio de la circunferencia.



Por el teorema de Pitágoras se puede calcular la altura H ya que se conoce el lado del triángulo $l = 6$

$$H^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$H^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$H = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{2}(6) = 3\sqrt{3}$$

Ahora observe que el triángulo que tiene base r e hipotenusa $H - r$ es semejante al triángulo de base $l/2$ e hipotenusa l ya que ambos son rectángulos y tienen un ángulo agudo común. Al aplicar proporcionalidad entre sus lados se tiene

$$\frac{H-r}{r}=\frac{l}{\frac{l}{2}}$$

Despejando r y sustituyendo los valores de l y H se obtiene

$$\frac{H-r}{r}=2$$

$$H-r=2r$$

$$H=3r$$

$$r=\frac{H}{3}$$

$$r=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

Entonces el área del círculo es

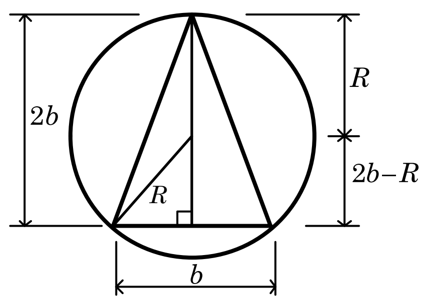
$$A=\pi r^2=\pi\left(\sqrt{3}\right)^2=3\pi$$

Ejemplo 2: Triángulo isósceles inscrito en círculo

Encuentre el área de un triángulo isósceles inscrito en un círculo de radio R si la altura del triángulo es igual al doble de su base.

Solución

En la figura se muestra el triángulo inscrito, así como su altura y el radio del círculo trazado a uno de los vértices del triángulo.



Al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es R, uno de sus catetos es $2b-R$ y el otro cateto con longitud $\frac{b}{2}$ se tiene

$$R^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+(2b-R)^2$$

Despejando la base b en términos del radio R se tiene

$$R^2=\frac{b^2}{4}+4b^2-4bR+R^2$$

$$0=b^2+16b^2-16bR$$

Trasladando los términos al lado izquierdo y factorizando se tiene

$$17b^2-16bR=0$$

$$b(17b-16R)=0$$

Como b no puede ser igual a cero se tiene que

$$b = \frac{16R}{17} \quad \text{y} \quad h = 2b = 2\left(\frac{16R}{17}\right) = \frac{32R}{17}$$

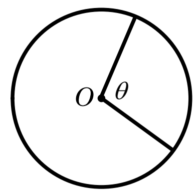
El área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}(b)(h) = \frac{1}{2}\left(\frac{16R}{17}\right)\left(\frac{32R}{17}\right) = \frac{256}{289}R^2$$

Arcos, sectores y segmentos

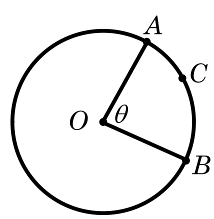
Ángulo central:

Es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. En la figura θ es un ángulo central.



Arco:

Si A y B son dos puntos en una circunferencia, el arco AB, está formado por los puntos A y B y por todos los puntos de la circunferencia entre A y B. Como hay dos arcos que se pueden asociar a dos puntos sobre una circunferencia, es importante aclarar a cuál de los arcos se está haciendo referencia. Por ejemplo, en la siguiente figura para referirse al arco subtendido por el ángulo θ, se puede utilizar un punto intermedio entre los puntos A y B, y llamarlo arco ACB



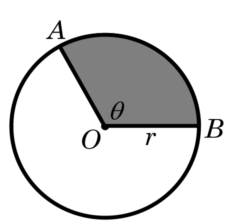
Longitud de arco:

Como el perímetro de una circunferencia es $2\pi r$, es lógico pensar que la longitud del arco está relacionada con el perímetro de la misma. De hecho si el ángulo central es θ, su medida está en grados y el radio de la circunferencia es r, la longitud del arco es

$$l = \frac{\theta}{360}(2\pi r) = \frac{\theta \pi r}{180}$$

Sector circular:

Un sector circular es una región plana limitada por dos radios y un arco. En la figura ABO es un sector circular.



Como el área de un círculo es πr^2, es razonable pensar que el área de un sector sea proporcional al ángulo θ y al área del círculo. La expresión para calcular el área del sector circular cuando el ángulo θ está expresado en grados es

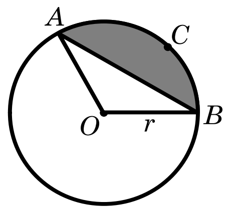
$$A = \frac{\theta}{360}(\pi r^2)$$

El perímetro se obtiene sumando la longitud del arco con el doble del radio, es decir

$$P = \frac{\theta \pi r}{180} + 2r$$

Segmento circular:

Un segmento circular es la región limitada por una cuerda y por un arco del círculo. En la figura ACB es un segmento circular



El área del segmento circular se obtiene restando el área del triángulo al área del sector, es decir

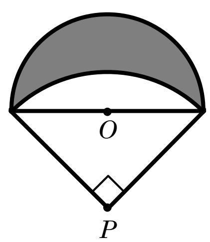
$$A = A \text{ sector } OACB - A \text{ triángulo } OAB$$

El perímetro del segmento se obtiene sumando la longitud del arco con la longitud de la curda, es decir

$$P = \text{ longitud } ACB + \text{ longitud } AB$$

Ejemplo 3: Calculando el área sombreada

La figura muestra una semicircunferencia con centro en el punto O, cuyo diámetro es 20 cm y un sector circular con centro en el punto P. Encuentre el área sombreada.

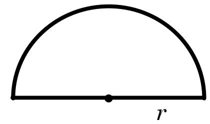


Solución

Para calcular el área sombreada, se debe expresar el área sombreada como la suma y resta de áreas de figuras geométricas conocidas (triángulos, círculos, cuadrados, etc.). Para ello hay que observar con detenimiento la región sombreada y diseñar una estrategia. Muchas veces el mismo problema se puede resolver combinando las áreas de formas diferentes.

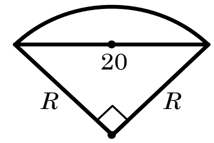
En este problema el área sombreada se puede calcular como el área del semicírculo de radio $r = 10\,\text{cm}$, menos el área del segmento circular de radio R.

El área del semicírculo es



$$A_1 = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(10)^2 = 50\pi$$

Para calcular el área del segmento primero hay que calcular el radio R usando el teorema de Pitágoras



$$\begin{aligned} R^2 + R^2 &= 20^2 \\ 2R^2 &= 400 \\ R &= \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

El área del segmento A_2 es el área del sector menos el área del triángulo, es decir

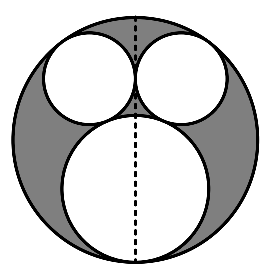
$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\theta}{360}(\pi R^2) - \frac{1}{2}(R)(R) \\ &= \frac{90}{360}\pi\left(10\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(10\sqrt{2}\right)\left(10\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{100(2)}{4}\pi - \frac{100(2)}{2} \\ &= 50\pi - 100 \end{aligned}$$

Finalmente el área sombreada es

$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 \\ &= 50\pi - (50\pi - 100) \\ &= 100\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

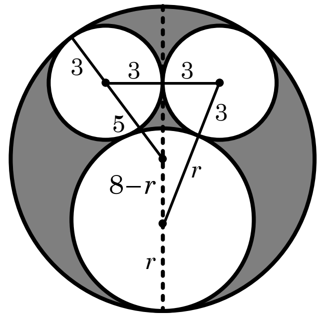
Ejemplo 4: Calculando el área sombreada en círculos

La figura muestra una circunferencia de 8 centímetros de radio que tiene inscritas tres circunferencias. Las dos circunferencias pequeñas tienen radio de 3 centímetros y son tangentes interiormente a la circunferencia mayor y al diámetro mostrado con línea discontinua. La otra circunferencia tiene radio desconocido y es tangente a las dos circunferencias pequeñas y a la circunferencia mayor. Encuentre el área sombreada.

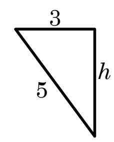


Solución

En la siguiente figura se han trazado algunos segmentos que muestran las relaciones entre los radios de las circunferencias.



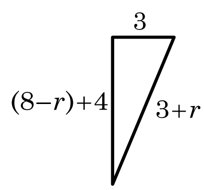
Note que se forman dos triángulos rectángulos, en el triángulo pequeño, el cateto menor mide 3 cm y la hipotenusa mide 5 cm pues es la diferencia entre el radio mayor 8 y el radio menor 3. Al calcular el cateto mayor de éste triángulo se obtiene



$$3^2 + h^2 = 5^2$$

$$h = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Al utilizar el teorema de Pitágoras en el otro triángulo rectángulo se tiene



$$\left[(8 - r) + 4\right]^2 + (3)^2 = (3 + r)^2$$

Resolviendo la ecuación anterior para r

$$(8 - r)^2 + 8(8 - r) + 16 + 9 = 9 + 6r + r^2$$

$$64 - 16r + r^2 + 64 - 8r + 16 = 6r + r^2$$

$$144 - 24r = 6r$$

$$30r = 144$$

$$r = \frac{144}{30} = \frac{24}{5}$$

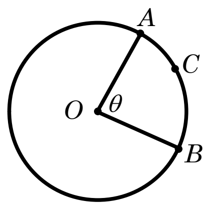
El área sombreada en la figura es

$$A_s = \pi(8)^2 - 2\pi(3)^2 - \pi\left(\frac{24}{5}\right)^2 = 64\pi - 18\pi - \frac{576}{25}\pi$$

$$= \frac{574}{25}\pi \text{ cm}^2$$

Medida de arcos y ángulos en la circunferencia

Ya se ha definido un arco de la circunferencia y se ha calculado su longitud. Un arco de circunferencia también puede ser medido en grados, en este sentido, la medida de un arco se define como la medida de su ángulo central. En la figura la medida del arco ACB es θ

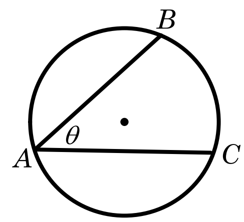


$$ACB = \theta$$

Los siguientes teoremas permiten calcular una serie de ángulos y arcos que son formados cuando dos rectas secantes o tangentes se intersecan para formar ángulos en el interior o en el exterior de una circunferencia.

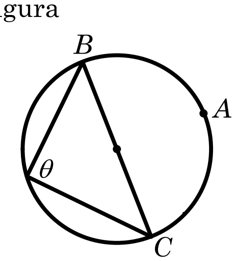
Angulo inscrito en la circunferencia

Un ángulo se llama inscrito si su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas de la circunferencia. La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco que intercepta.



$$\theta = \frac{1}{2} BC$$

Un caso especial del ángulo inscrito es el que subtiende un arco de 180º, la medida de éste ángulo esa es 90º, como se muestra en la siguiente figura

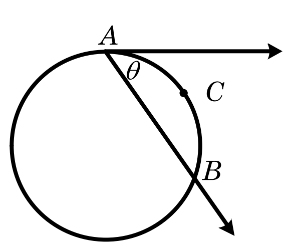


$$\theta = \frac{1}{2} BAC = \frac{1}{2}(180^\circ) = 90^\circ$$

De donde se puede concluir que la medida de un ángulo inscrito en una semicircunferencia es 90º.

Angulo formado por una secante y una tangente

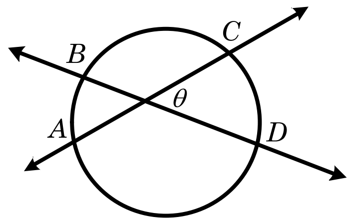
La medida de un ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados están formados por una recta secante y por una recta tangente a la circunferencia, es igual a la mitad de la medida del arco interceptado.



$$\theta = \frac{1}{2} ACB$$

Angulo formado por dos secantes que se intersecan en el interior de la circunferencia

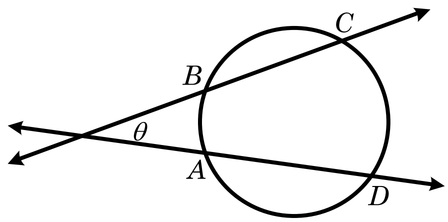
La medida de un ángulo formado por dos secantes que se intersecan en el interior de una circunferencia, es igual a la mitad de la suma de las medidas de los arcos interceptados.



$$\theta = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right)$$

Angulo formado por dos secantes que se intersecan fuera de la circunferencia

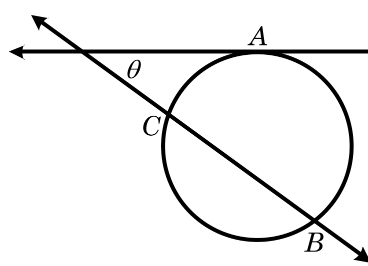
La medida de un ángulo formado por dos secantes que se intersecan fuera de una circunferencia, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.



$$\theta = \frac{1}{2}\left(CD - AB\right)$$

Ángulo formado por una tangente y una secante que se intersecan fuera de la circunferencia.

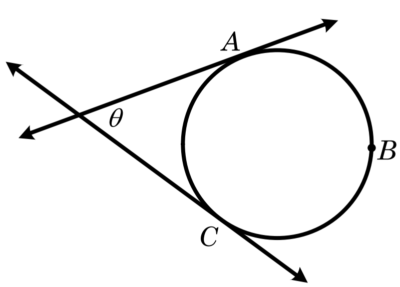
La medida de un ángulo formado por una tangente y una secante que se intersecan en el exterior de una circunferencia, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.



$$\theta = \frac{1}{2}\left(AB - AC\right)$$

Ángulo formado por dos tangentes que se intersecan fuera de la circunferencia.

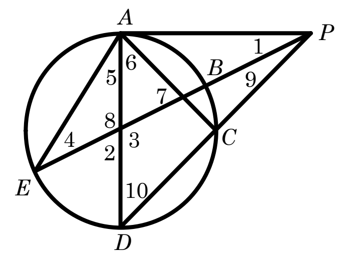
La medida de un ángulo formado por dos tangentes que se intersecan en el exterior de una circunferencia, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.



$$\theta = \frac{1}{2}\left(ABC - AC\right)$$

Ejemplo 5: Calculando ángulos en la circunferencia

En la figura mostrada el segmento AP es tangente a la circunferencia en A, los segmentos AD y BE son diámetros, la medida del arco $AE = 115^{o}$, los segmentos $AD = AP$. Encuentre la medida de todos los ángulos numerados.



Solución

Los ángulos no necesariamente se calcularán en el orden en que están numerados. En ocasiones es necesario calcular la medida de ciertos arcos para luego calcular los ángulos.

Él $\angle 8$ es un ángulo central ya que los segmentos AD y BE son diámetros, entonces

$$\angle 8 = AE = 115^{o}$$

Él $\angle 3$ es igual al $\angle 8$ pues son ángulos opuestos por el vértice, entonces

$$\angle 3 = \angle 8 = 115^{o}$$

Él $\angle 2$ es suplementario del ángulo $\angle 8$, entonces

$$\angle 2 = 180^{o} - \angle 8 = 180^{o} - 115^{o} = 65^{o}$$

Como el segmento BE es un diámetro, entonces

$$BAE = 180^{o}$$

Calculando el arco AB

$$AB + AE = 180^{o}$$

$$AB = 180^{o} - AE = 180^{o} - 115^{o} = 65^{o}$$

Él $\angle 4$ es un ángulo inscrito en la circunferencia, entonces

$$\angle 4 = \frac{1}{2}AB = \frac{65^{o}}{2} = 32.5^{o}$$

Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º

$$\angle 5 = 180^{o} - \angle 4 - \angle 8 = 180^{o} - 32.5^{o} - 115^{o} = 32.5^{o}$$

Él $\angle 1$ está formado por una tangente y una secante a la circunferencia, entonces

$$\angle 1 = \frac{1}{2}\left(AE - AB\right) = \frac{1}{2}(115^{o} - 65^{o}) = \frac{50^{o}}{2} = 25^{o}$$

Como los segmentos $AD = AP$, entonces el triángulo ΔDAP es isósceles y los ángulos $\angle 10$ y $\angle APD$ son iguales. Por otro lado el segmento AD es perpendicular al segmento AP, entonces el triángulo ΔDAP es rectángulo y también es isósceles, entonces

$$\angle 10 = 45^{o}$$

Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º

$$\angle 9 = 180^{o} - \angle 10 - \angle 3 = 180^{o} - 45^{o} - 115^{o} = 20^{o}$$

El triángulo ΔDAP es rectángulo pues está inscrito en una semicircunferencia, entonces los ángulos 6 y 10 son complementarios, entonces

$$\angle 6 = 90^{\circ} - \angle 10 = 90^{\circ} - 45^{\circ} = 45^{\circ}$$

Solo falta calcular $\angle 7$, para hacerlo se usará la suma de los ángulos internos de un triángulo, pero antes hay que calcular el $\angle EAC$

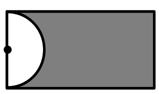
$$\angle EAC = \angle 5 + \angle 6 = 32.5^{\circ} + 45^{\circ} = 77.5^{\circ}$$

Finalmente se puede calcular el $\angle 7$

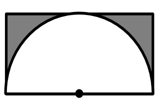
$$\angle 7 = 180^{\circ} - \angle EAC - \angle 4 = 180 - 77.5^{\circ} - 32.5^{\circ} = 70^{\circ}$$

Ejercicios de la sección 2.4

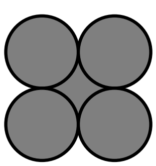
1. Encuentre el área de un círculo si su perímetro es 44 cm.
2. Encontrar el perímetro de un círculo si su área es 24π cm².
3. Encuentre el área comprendida entre dos círculos que tienen el mismo centro si los diámetros son 12 cm y 16 cm.
4. Encuentre el área de un círculo inscrito en un cuadrado de 6 cm de lado.
5. Se inscribe un semicírculo en un rectángulo de base 20 cm y altura 10 cm como se muestra en la figura. Calcule el área sombreada.



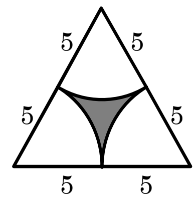
6. Se inscribe un semicírculo en un rectángulo de base 16 cm. Encuentre el área sombreada.



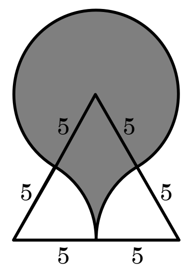
7. En la figura los cuatro círculos son tangentes entre sí y tienen el mismo radio de 5 cm. Encuentre el área sombreada.



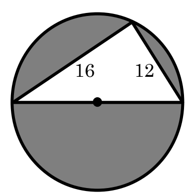
8. Encuentre el área de un cuadrado inscrito en un círculo de radio 6 cm.
9. Encuentre el área de un cuadrado inscrito en un semicírculo de radio 6 cm.
10. Un rectángulo de 6 cm por 8 cm está inscrito en un círculo. Encontrar el área que está dentro del círculo pero fuera del rectángulo.
11. El triángulo de la figura es equilátero de lado 10 cm. Encuentre el área sombreada.



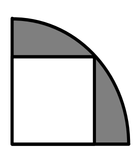
12. Encuentre el área sombreada



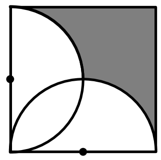
13. La figura muestra un triángulo inscrito en una semicircunferencia. Encuentre el área sombreada.



14. Los radios de dos círculos concéntricos difieren en $\sqrt{2}$. Encontrar el radio de cada círculo sabiendo que el área del anillo formado es $2\pi\left(1 + 3\sqrt{2}\right)$.
15. Se inscribe un cuadrado en un cuarto de círculo de radio 5 cm, como se muestra en la figura, encuentre el área sombreada



16. Dos semicírculos están inscritos en un cuadrado de lado 6 cm, como se muestra en la figura. Encontrar el área sombreada.



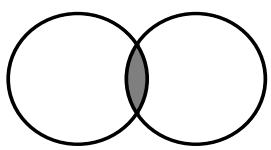
17. En un círculo de radio 6 cm, se recorta un anillo de área igual a la mitad del área del círculo, encontrar el ancho del anillo.

18. Se inscribe un triángulo equilátero en un círculo de radio 8 cm. Encontrar el área del segmento limitado por un lado del triángulo y por la circunferencia.

19. En un círculo de radio 6 cm, calcule el área del segmento si la longitud de la cuerda es 6 cm.

20. Encontrar el perímetro de un segmento si el radio del círculo es 12 cm y el ángulo central mide 120º.

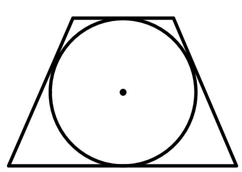
21. La figura muestra dos círculos iguales de radio 8 cm que se intersecan de manera que su cuerda común mide 8 cm. Encontrar el área sombreada



22. Dos rectas tangentes a una circunferencia interceptan un arco de 120º. Si las dos rectas se interceptan entre ellas, encontrar el perímetro de la región limitada por las dos tangentes y el arco.

23. En un círculo de radio 10 cm se inscribe un trapecio isósceles cuyas bases miden 12 y 16 cm. Si el centro del círculo queda en el interior del trapecio, encontrar el área dentro del círculo pero fuera del trapecio.

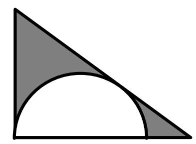
24. En la figura se muestra un trapecio isósceles cuyas bases miden 18 cm y 8 cm. Todos los lados del trapecio son tangentes a la circunferencia. Encontrar el área del trapecio.



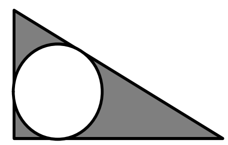
25. Un rombo tiene diagonales de 18 y 24 cm. Encontrar el área del círculo inscrito en el rombo.

26. Un trapecio isósceles se inscribe en un semicírculo de radio 1 cm, de tal forma que uno de los lados paralelos coincide con el diámetro del semicírculo. Si la diagonal del trapecio mide $\sqrt{3}$, encuentre el área del trapecio.

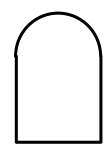
27. En la figura se muestra un semicírculo inscrito en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 cm y 6 cm. Calcule el área sombreada.



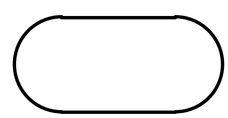
28. Se inscribe un círculo en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 cm y 2 cm. Encuentre el área sombreada.



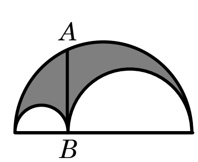
29. Una ventana de iglesia tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto, como se muestra en la figura. Determine las dimensiones de la misma si su perímetro es $10 + 2\pi$ y su área es $8 + \pi$



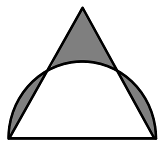
30. Se quiere construir un campo de futbol rectangular con un área de 6,000 metros cuadrados. El diseño incluye dos áreas semicirculares en cada extremo para formar una pista de atletismo de longitud total de 400 metros, como se muestra en la figura. Determine las dimensiones de la pista.



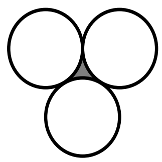
31. En la figura se muestran dos semicírculos inscritos en un semicírculo de radio 4 cm. Si la longitud del segmento AB es 3 cm. Encuentre el área sombreada.



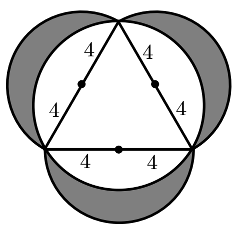
32. En la figura se muestra un triángulo equilátero de 2 cm de lado y una semicircunferencia que tiene su diámetro sobre uno de los lados del triángulo. Encuentre el área sombreada.



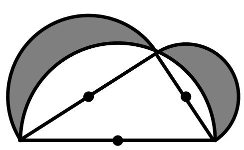
33. Tres círculos iguales de 12 cm de radio son tangentes entre sí. Encontrar el área sombreada.



34. Encuentre el área sombreada en la siguiente figura.



35. La figura muestra un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b, inscrito en una semicircunferencia. Adicionalmente la figura tiene dos semicírculos con centro en el punto medio de los catetos. Encuentre el área sombreada.

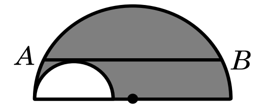


36. Un jardín circular tiene 12 metros de diámetro y es atravesado por un camino de concreto 3 metros de ancho, de forma que uno de los lados del camino pasa por el centro del jardín. Encontrar el área que está sembrada.

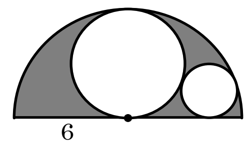
37. Los lados de un triángulo isósceles miden 5, 5 y 6 cm. Encontrar la razón de las áreas de los círculos inscrito y circunscrito.

38. En un círculo de radio R se inscribe y se circunscribe un triángulo equilátero. Encontrar la razón de las áreas del triángulo inscrito al triángulo circunscrito.

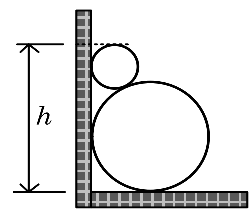
39. Un semicírculo de radio R contiene en su interior otro semicírculo de radio desconocido. Si la longitud de la cuerda AB es 24 cm. Encontrar el área sombreada.



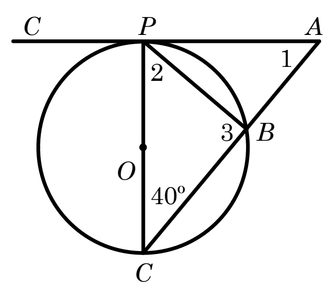
40. La figura muestra un semicírculo de radio 6 cm que tiene en su interior dos círculos inscritos. Si los dos círculos inscritos son tangentes entre sí y tangentes al semicírculo, como se muestra en la figura. Encontrar el área sombreada.



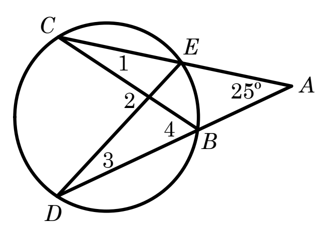
41. Encuentre la altura h si los círculos tienen radios de 10 cm y 4 cm.



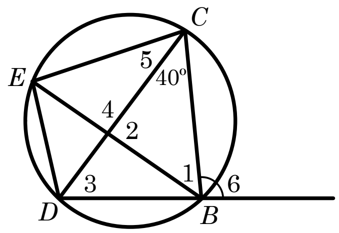
42. En la figura el segmento PC es un diámetro y el segmento AC es tangente en P. Encuentre la medida de los ángulos numerados.



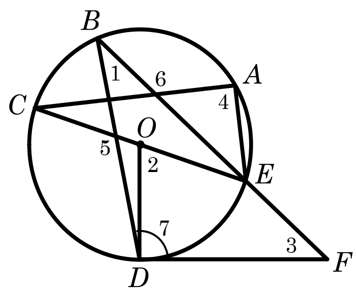
43. En la figura $CD = 110^{\circ}$. Encuentre la medida de los ángulos numerados.



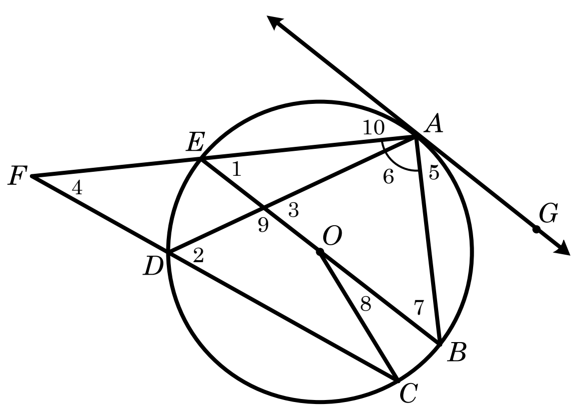
44. En la figura $BC = 120^\circ$, $EC = 85^\circ$ Encuentre la medida de los ángulos numerados.



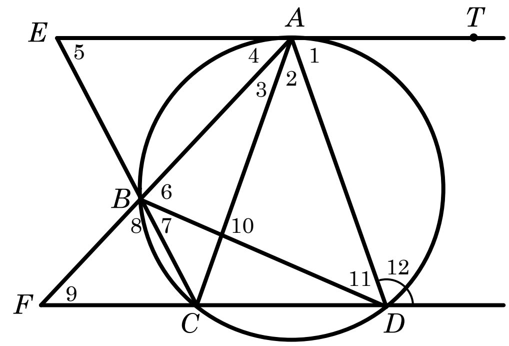
45. En la figura el segmento CE es un diámetro, $CB = 25^\circ$, $DE = 80^\circ$, $AE = 60^\circ$ Encuentre la medida de los ángulos numerados.



46. En la figura el segmento BE es un diámetro, la recta AG es tangente en A, $AB = 80^\circ$, $BC = 20^\circ$, $DE = 50^\circ$. Calcule la medida de los ángulos numerados.



47. En la figura la recta ET es tangente en A, $\overline{ET} \parallel \overline{FD}$, el arco $AD = 140^\circ$, $BC = 50^\circ$. Encuentre la medida de los ángulos numerados.



48. En la figura el segmento CE es un diámetro, $CD = 80^\circ$, $BC = 50^\circ$, $\angle 3 = 20^\circ$. $\angle 6 = 30^\circ$. El segmento AP es tangente en A. Encuentre la medida de los ángulos numerados.