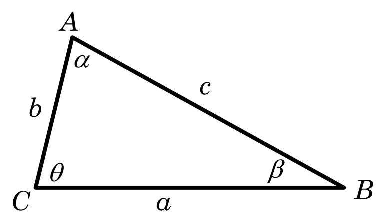
2.2 Triángulos

OBJETIVOS

- Calcular el área y el perímetro de triángulos.
- Obtener los lados y ángulos de triángulos utilizando las relaciones entre ángulos en figuras geométricas.
- Calcular los lados de un triángulo usando el teorema de Pitágoras y las propiedades de los triángulos semejantes.

Definición

En Geometría, un **triángulo** es un polígono formado por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos, que no están alineados. Los puntos de intersección de las rectas se les llama **vértices** y los segmentos de recta que forman el triángulo se llaman **lados**. Cada par de lados en un triángulo forman un ángulo interno, por lo tanto un triángulo tiene 3 lados y 3 ángulos internos, como se muestra en la figura siguiente



Clasificación de triángulos

Los triángulos se pueden clasificar en base a la medida de sus lados o bien en base a la medida de sus ángulos.

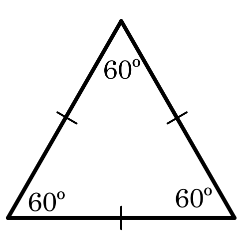
Por sus lados:

Por las longitudes de sus lados, los triángulos se clasifican como:

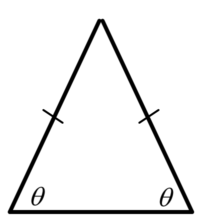
Triángulo equilátero: Es el triángulo que tiene 3 lados iguales y tres ángulos iguales, cada ángulo tiene una medida de 60º.

Triángulo isósceles: Es el que tiene dos lados iguales. Los ángulos opuestos a esos lados son iguales.

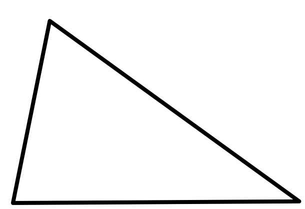
Triángulo escaleno: Es el que tiene sus tres lados con diferente longitud. En el triángulo escaleno los tres ángulos tienen diferente medida.



Triángulo equilátero



Triángulo isósceles


Triángulo escaleno

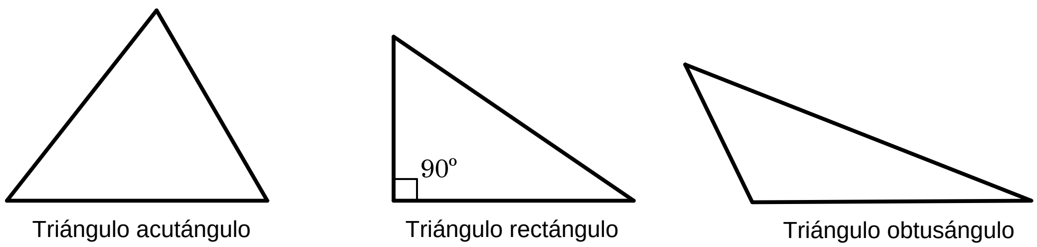
Por sus ángulos:

Por la medida de sus ángulos, los triángulos se clasifican como:

Triángulo acutángulo: Es el triángulo en el que todos sus ángulos internos son agudos.

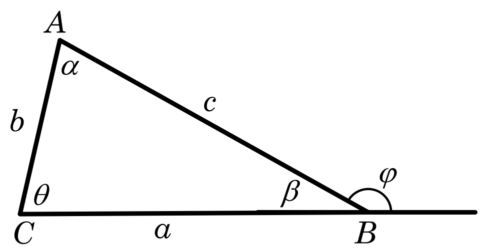
Triángulo rectángulo: Es el que tiene un ángulo recto, es decir su medida es 90º.

Triángulo obtusángulo: Es el que tiene un ángulo obtuso, es decir un ángulo que mide más de 90º y menos de 180º.



Propiedades generales del triángulo

La figura muestra un triángulo en donde los ángulos internos son α, β y θ. También se muestra el ángulo externo φ, el cual se forma al prolongar uno de los lados del triángulo.

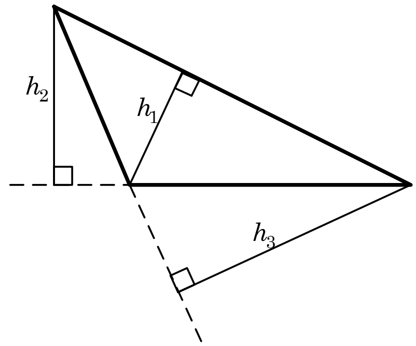


Cuatro de las propiedades generales son:

1. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º, es decir que
$$\alpha + \beta + \theta = 180^{\circ}$$
2. La medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos opuestos, es decir
$$\varphi = \theta + \alpha$$
3. En un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios, es decir que sus medidas suman 90º.
4. La suma de las medidas de dos lados de un triángulo, siempre es mayor que la medida del otro lado, es decir
$$a + b > c, \qquad b + c > a, \qquad a + c > b$$

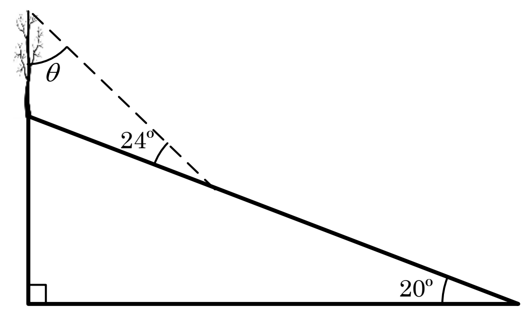
Altura de un triángulo:

Es el segmento que va desde uno de sus vértices a la recta que contiene al lado opuesto y que es perpendicular a dicha recta. Puesto que un triángulo tiene 3 vértices, hay una altura correspondiente a cada uno, es decir que un triángulo tiene 3 alturas. En los triángulos obtusos para trazar dos de sus alturas es necesario prolongar los lados opuestos, como se muestra en la figura siguiente



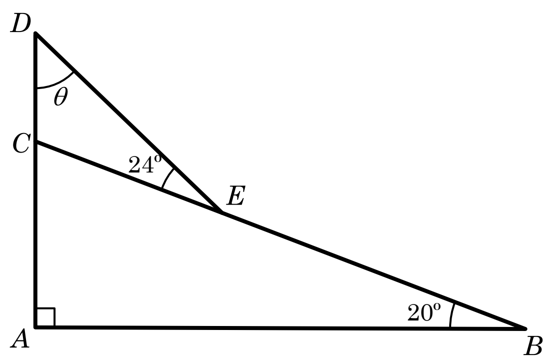
Ejemplo 1: Calculando ángulos en triángulos

En la figura se muestra un árbol que se encuentra en la parte superior de una colina que forma un ángulo de 20º con la horizontal. Un observador situado en un punto sobre la colina mide el ángulo formado entre la colina y la punta del árbol en 24º. Calcule la medida del ángulo θ .



Solución

Identificando con letras mayúsculas los puntos importantes de la figura se tiene



La medida del ángulo $\angle ACB$ es

$$\angle ACB = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

pues en un triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios.

Como los ángulos $\angle ACB$ y $\angle DCE$ son suplementarios se obtiene

$$\begin{aligned}\angle DCE &= 180^\circ - \angle ACB \\ &= 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ\end{aligned}$$

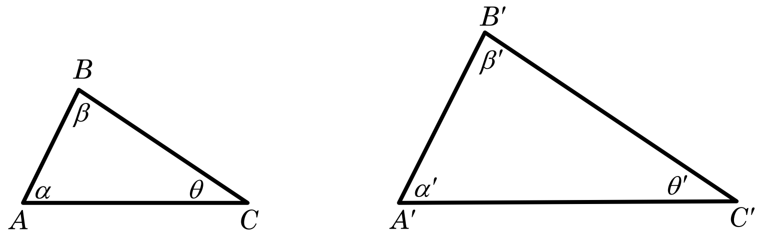
Finalmente, se puede obtener el ángulo θ ya que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º, entonces

$$\begin{aligned}\theta &= 180^\circ - 24^\circ - \angle DCE \\ &= 180^\circ - 24^\circ - 110^\circ \\ &= 46^\circ\end{aligned}$$

Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales, en la figura se muestran los triángulos semejantes ΔABC y $\Delta A'B'C'$. En forma simbólica para indicar que dos triángulos son semejantes se escribe

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



El ángulo α es correspondiente con el ángulo α' y por lo tanto son iguales, es decir $\alpha = \alpha'$. El ángulo β es correspondiente con el ángulo β', entonces $\beta = \beta'$. Finalmente el ángulo θ es correspondiente con el ángulo θ', entonces $\theta = \theta'$.

Los lados correspondientes son los que están opuestos a los ángulos correspondientes, así tenemos que el lado AB es correspondiente con el lado $A'B'$, el lado BC es correspondiente con el lado $B'C'$ y el lado AC es correspondiente con el lado $A'C'$.

Puesto que los lados correspondientes son proporcionales, cuando dos triángulos son semejantes se pueden establecer las relaciones siguientes

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Para establecer que dos triángulos son semejantes y poder así utilizar las ecuaciones que se derivan de la proporcionalidad de sus lados, se puede utilizar el postulado de los triángulos semejantes

POSTULADO SOBRE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo, los triángulos son semejantes.

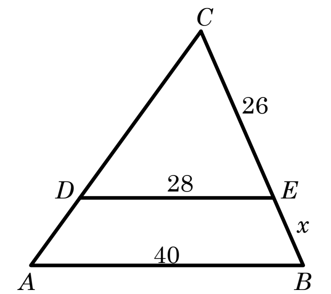
Adicionalmente en el cuadro siguiente se presentan algunos teoremas sobre semejanza, que pueden resultar de mucha utilidad en la solución de problemas. Estos teoremas se pueden demostrar utilizando el postulado de la semejanza de triángulos y las relaciones entre ángulos estudiadas en la sección anterior

TEOREMAS SOBRE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

1. Si dos triángulos son semejantes, la razón de sus perímetros es igual a la razón de cualquier par de lados correspondientes.
2. Si una recta es paralela a uno de los lados de un triángulo, la recta divide a los otros dos lados en segmentos que son proporcionales.
3. Si dos triángulos son semejantes, sus alturas correspondientes están en la misma razón que cualquier par de lados correspondientes.
4. En un triángulo rectángulo, la altura perpendicular a la hipotenusa forma dos triángulos que son semejantes entre sí y semejantes al triángulo dado.

Ejemplo 2: Semejanza de triángulos

Dado el triángulo ΔABC, donde $AB \parallel DE$, $AB = 40$, $DE = 28$ y $CE = 26$. Encuentre la longitud del segmento BE.



Solución

Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo forma dos triángulos semejantes, ya que estos tienen un ángulo común y además los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales, entonces los triángulos ΔABC y ΔDEC son semejantes. Utilizando la proporcionalidad entre sus lados se obtiene

$$\frac{EC}{BC} = \frac{DE}{AB}$$

Sustituyendo la información dada y despejando x

$$\frac{26}{26 + x} = \frac{28}{40}$$

$$(26)(40) = 28(26 + x)$$

$$\frac{(26)(40)}{28} = 26 + x$$

$$x = \frac{(26)(40)}{28} - 26 = \frac{260}{7} - 26$$

$$x = \frac{78}{7} \approx 11.14$$

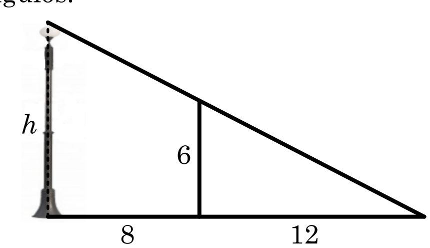
Respuesta: la longitud del segmento BE es aproximadamente 11.14 unidades.

Ejemplo 3: Altura de un poste de luz

Para determinar la altura de un poste de luz, una persona de 6 pies de altura se coloca a una distancia de 8 pies de la base del poste. Se mide que la longitud de la sombra que la persona proyecta sobre el suelo tiene 12 pies de largo. Determine la altura del poste.

Solución

La figura ilustra el problema. Puede observarse que se forman dos triángulos semejantes ya que tienen un ángulo común y además ambos tienen un ángulo de 90º pues son triángulos rectángulos.



Si h es la altura del poste, se establece la proporcionalidad entre la altura h del triángulo grande con la altura del triángulo pequeño y la base del triángulo grande (8+12), con la base del triángulo pequeño, obteniéndose la ecuación

$$\frac{h}{6} = \frac{8+12}{12}$$

Al despejar h se obtiene la altura del poste

$$h = \frac{(20)(6)}{12}$$

$$= 10$$

Respuesta: la altura del poste es de 10 pies

Teorema de Pitágoras

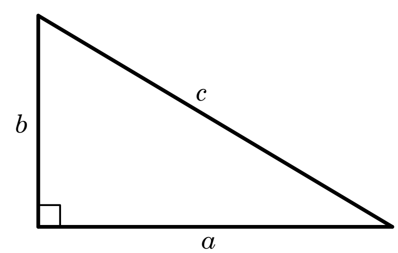
Junto con la proporcionalidad de los lados correspondientes en los triángulos semejantes, el Teorema de Pitágoras es una de las expresiones más utilizadas en la solución de problemas geométricos, éste teorema establece que

TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Si c es la hipotenusa, a y b son los catetos del triángulo, entonces

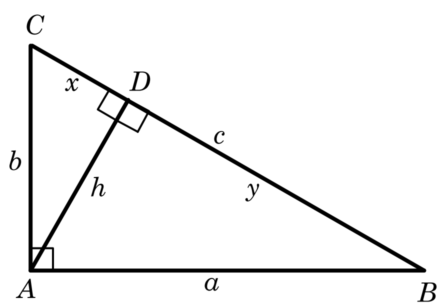
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Demostración

Hay muchas maneras de demostrar el teorema de Pitágoras, una de ellas consiste en utilizar la semejanza de triángulos, que es la que se presenta aquí.

Al trazar la altura correspondiente a la hipotenusa, se forman dos nuevos triángulos, que son semejantes entre sí y que son semejantes al triángulo dado (véase teoremas de semejanza). Sea h la altura del triángulo dado, x y y los catetos de los triángulos formados, como se muestra en la figura



El triángulo ΔABC es semejante al triángulo ΔDBA . Estableciendo igualdad entre los cocientes de las hipotenusas con el cociente entre los catetos mayores se obtiene

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{y}$$

De donde se obtiene que $a^2 = cy$

En forma similar, el triángulo ΔABC es semejante al triángulo ΔDAC . Estableciendo igualdad entre los cocientes de las hipotenusas con el cociente entre los catetos mayores se obtiene

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$$

De donde se obtiene que $b^2 = cx$

Sumando las expresiones obtenidas para a^2 y b^2 se tiene

$$a^2 + b^2 = cy + cx$$

$$c(y + x)$$

Como $c = x + y$, se puede sustituir, c por $y + x$ para completar la demostración del teorema

$$a^2 + b^2 = c(y + x)$$

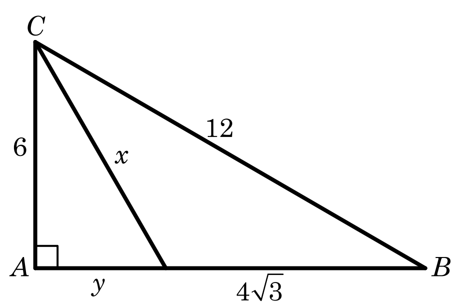
$$a^2 + b^2 = c(c)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Quedando así demostrado el teorema.

Ejemplo 4: Utilizando el teorema de Pitágoras

La figura muestra un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud 12 cm y uno de sus catetos con longitud 6 cm. Encuentre x y y.



Solución

La longitud del cateto AB puede expresarse como $AB = y + 4\sqrt{3}$. Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene

$$6^2 + \left(y + 4\sqrt{3}\right)^2 = 12^2$$

Resolviendo la ecuación para encontrar y

$$\left(y + 4\sqrt{3}\right)^2 = 144 - 36$$

$$y + 4\sqrt{3} = \pm\sqrt{108}$$

$$y = \pm 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

Descartando la solución negativa pues el valor de y debe ser positivo.

$$y = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

Para encontrar x se aplica nuevamente el teorema de Pitágoras, ahora en el triángulo rectángulo pequeño

$$6^2 + y^2 = x^2$$

Sustituyendo $y = 2\sqrt{3}$ y despejando x se tiene

$$36 + (2\sqrt{3})^2 = x^2$$

$$x^2 = 36 + 4(3)$$

$$x^2 = 48$$

$$x = \pm\sqrt{48}$$

Descartando nuevamente la solución negativa se tiene que

$$x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

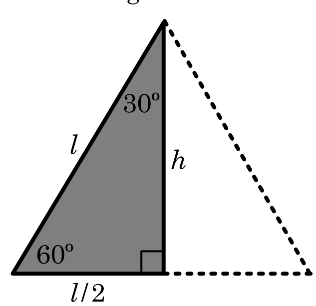
Respuesta: $x = 4\sqrt{3}$ y $y = 2\sqrt{3}$

Triángulos especiales

Dos de los triángulos más utilizados en geometría son el triángulo rectángulo que tiene ángulos agudos con medidas de 30º y 60º y el triángulo rectángulo isósceles que tiene dos ángulos agudos iguales de 45º.

Triángulo 30º- 60º- 90º

Cuando se traza una de las alturas en un triángulo equilátero, se forman dos triángulos iguales que tienen ángulos de 30º, 60º y 90º, como se muestra en la figura.



Si la hipotenusa tiene longitud l, la base tiene longitud $l/2$ ya que es la mitad de uno de los lados del triángulo equilátero.

Para expresar la altura h en términos de la longitud de la hipotenusa l se utiliza el teorema de Pitágoras.

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = l^2$$

Despejando h en términos de l se tiene.

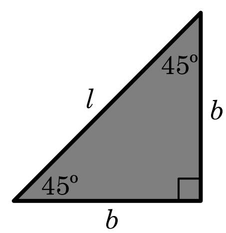
$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Triángulo 45º- 45º- 90º

Este triángulo es el único que tiene la característica de ser simultáneamente rectángulo e isósceles. La figura muestra un triángulo 45º - 45º - 90º cuya hipotenusa tiene una longitud l y los catetos iguales tienen longitud b.



Para expresar la longitud de los catetos en términos de l se utiliza el teorema de Pitágoras

$$b^2 + b^2 = l^2$$

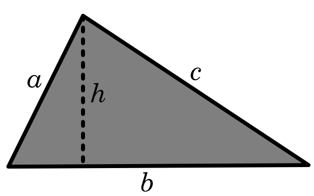
$$2b^2 = l^2$$

$$b^2 = \frac{l^2}{2}$$

$$b = \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$$

Área y perímetro del triángulo

En un triángulo de lados a, b, c y altura h, donde h corresponde al lado de longitud b, como se indica en la figura. El área y el perímetro se calculan con las fórmulas siguientes

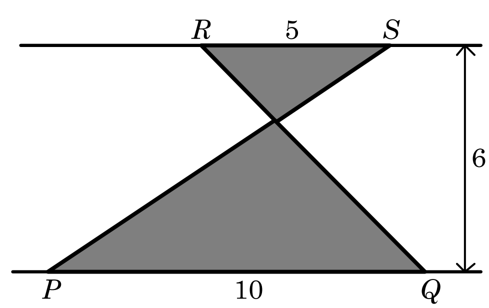


$$\text{Area} = \frac{1}{2}bh$$

$$\text{Perímetro} = a + b + c$$

Ejemplo 5: Calculando áreas de triángulos

En la figura $RS \parallel PQ$. Encuentre el área sombreada.



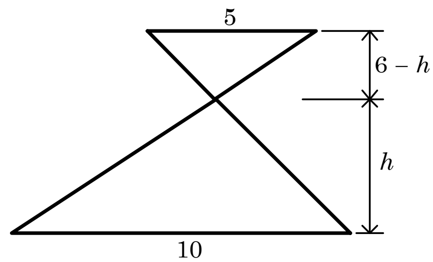
Solución

Si las rectas son paralelas, los triángulos son semejantes ya que tienen dos de sus ángulos iguales pues son ángulos alternos internos entre paralelas.

Si h es la altura del triángulo de base 10, la altura del triángulo de base 5 es $6-h$

Por semejanza de triángulos se tiene

$$\frac{10}{5}=\frac{h}{6-h}$$
$$2(6-h)=h$$
$$12-2h=h$$
$$h=4$$



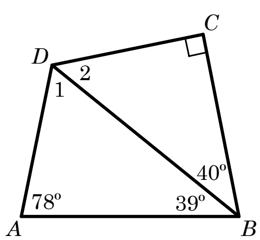
Entonces el triángulo de base 10 tiene altura 4 y el triángulo pequeño tiene altura 2. Al área total es la suma de las áreas de los dos triángulos

$$A=A_1+A_2$$
$$=\frac{1}{2}(10)(4)+\frac{1}{2}(5)(2)=20+5=25$$

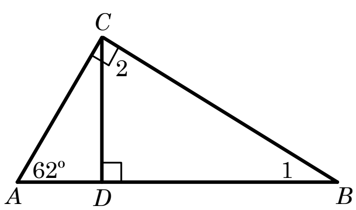
Respuesta: El área sombreada es 25 unidades cuadradas.

Ejercicios de la sección 2.2

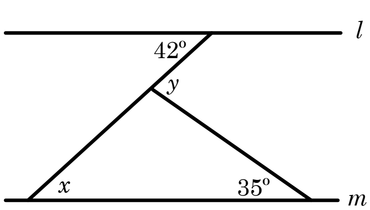
1. Encuentre la medida de los ángulos 1 y 2.



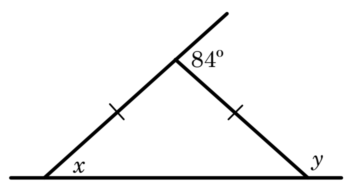
2. Encuentre la medida de los ángulos 1 y 2.



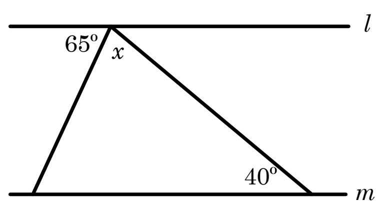
3. Si $l \parallel m$, encuentre la medida de los ángulos x y y.



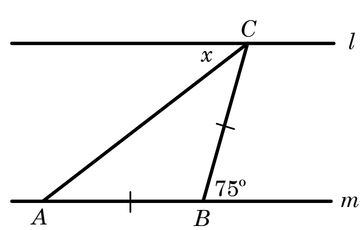
4. Encuentre la medida de los ángulos x y y.



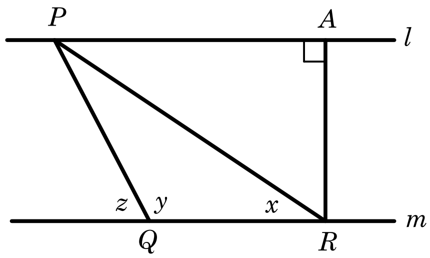
5. Si $l \parallel m$, encuentre la medida del ángulo x.



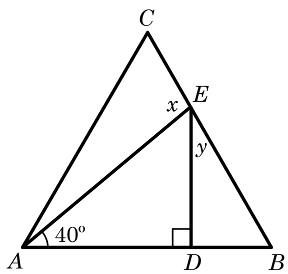
6. Si $l \parallel m$ y $AB = CD$, encuentre la medida del ángulo x.



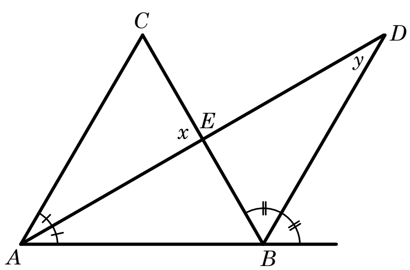
7. Si $l \parallel m$, $\angle APR = 40^\circ$, $\angle APQ = 80^\circ$. Calcule la medida de los ángulos x, y, z.



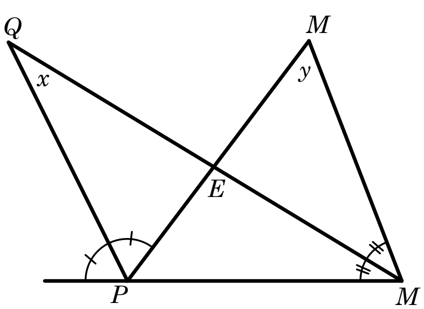
8. Si ΔABC es equilátero, encuentre la medida de los ángulos x y y.



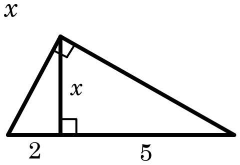
9. Si ΔABC es equilátero, encuentre la medida de los ángulos x y y.



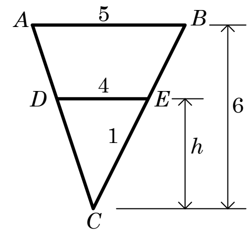
10. En la figura, la medida del ángulo $x = 42^\circ$. Obtenga la medida del ángulo y.



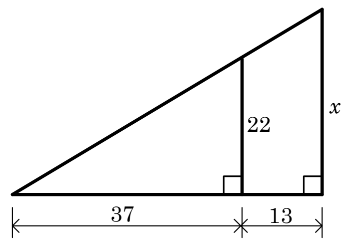
11. Encuentre x



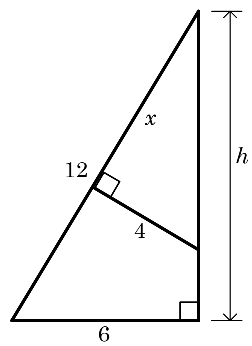
12. El segmento AB es paralelo al segmento DE. Calcula h.



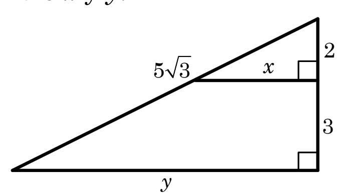
13. Encuentre x



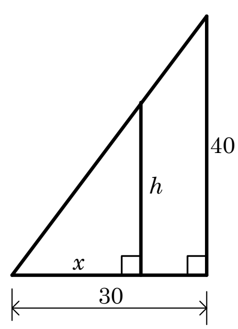
14. Encuentre h y x.



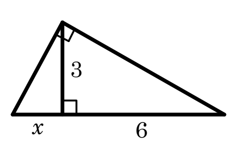
15. Encuentre x y y.



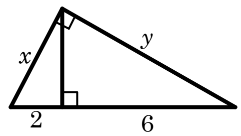
16. Exprese h en términos de x.



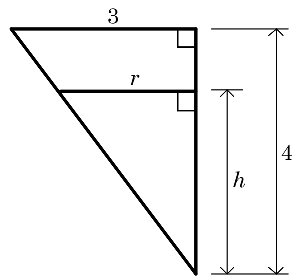
17. Encuentre x



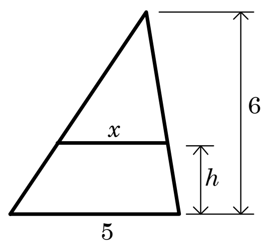
18. Encuentre x y y.



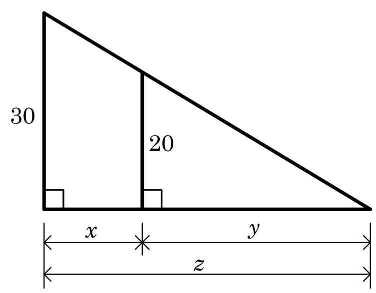
19. Exprese h en términos de r.



20. Exprese h en términos de x.



21. Exprese y en términos de x.



22. En la figura del problema anterior. Exprese z en términos de x.

23. Una persona camina 7 km hacia el norte, luego 6 km hacia el este y finalmente 4 km hacia el norte. ¿A qué distancia está del punto de partida?

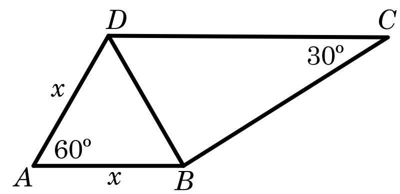
24. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 6 cm. Si la base del triángulo mide 10 cm. Encontrar la altura trazada a la base.

25. Encontrar la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 cm.

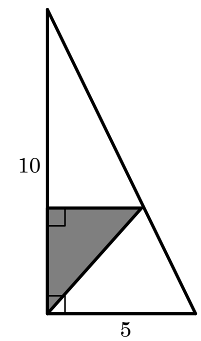
26. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 8 cm. Encontrar la medida de los catetos.

27. El lado de un triángulo equilátero es igual a la altura de otro triángulo equilátero. ¿En qué razón están el perímetro del triángulo mayor y el perímetro del triángulo menor?

28. Si $AB \parallel CD$, exprese la longitud del lado DC en términos de x.



29. Se inscribe un triángulo rectángulo isósceles dentro de un triángulo rectángulo de base 5 cm y altura 10 cm. Encuentre el área sombreada.



30. Un triángulo isósceles tiene lados iguales de 8 cm y base de 6 cm. Se traza una paralela a la base a una distancia de 5 cm de ella.

(a) Calcule el área de los triángulos formados.

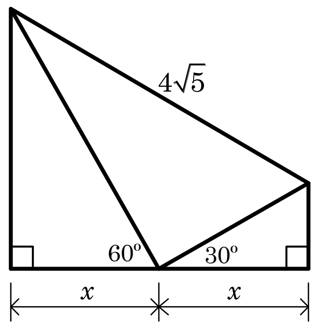
(b) Calcule la razón del perímetro del triángulo menor con la del triángulo mayor.

(c) Calcule la razón en la que se encuentra el área del triángulo mayor con la del menor.

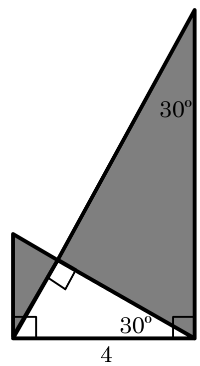
31. Los lados de un triángulo miden 10, 17 y 21 cm. Encontrar la altura trazada al lado de 21 cm. (Sugerencia: use dos variables)

32. Encontrar el perímetro de un triángulo equilátero de área $18\sqrt{3}$.

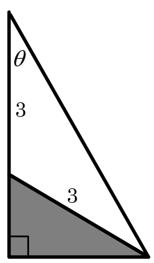
33. Encuentre la longitud x



34. Encuentre el área sombreada

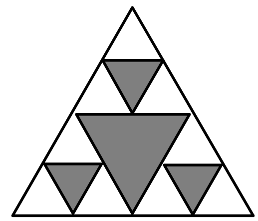


35. Si la medida del ángulo θ es 30º, calcule el área sombreada



36. Dado un triángulo equilátero de lado 6 cm, se traza un segmento paralelo a la base y a una altura de 4 cm. Encuentre en que razón se encuentran el área del triángulo pequeño que se ha formado con respecto al área del triángulo dado.

37. Si el lado del triángulo equilátero más grande mide 4 cm y todos los triángulos inscritos son equiláteros, calcule el área sombreada



38. La figura muestra dos postes de alturas 15 y 10 metros separados entre sí por una distancia de 20 metros. El cable que sostiene los postes está anclado al suelo en el punto P. Si $\alpha = \theta$, encuentre la longitud total del cable.