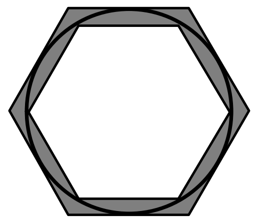
PROBLEMA RESUELTO 1

Un hexágono está inscrito y otro hexágono está circunscrito a una circunferencia de radio 6 cm. Encuentre el área de la región que se encuentra entre los dos hexágonos.

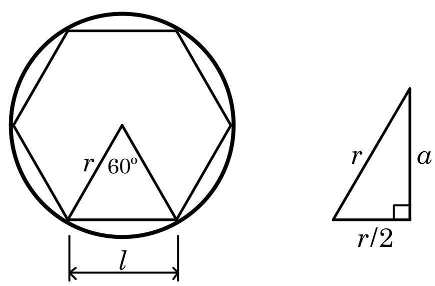
Solución

La figura muestra el área de la región buscada



El área sombreada es el área del hexágono circunscrito menos el área del hexágono inscrito.

Para calcular el área del hexágono circunscrito considere la figura siguiente, en donde se ha ampliado el triángulo rectángulo para mostrar los elementos.



La medida del ángulo central es $\theta = \dfrac{360}{6} = 60^{\circ}$

Como el triángulo es equilátero se tiene que $l = r$. El apotema se puede calcular utilizando el teorema de Pitágoras

$$a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$$

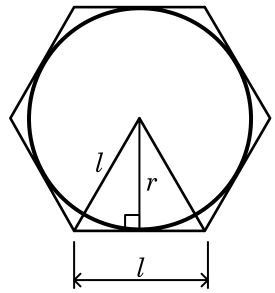
$$a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

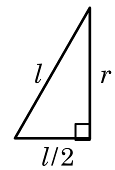
$$a = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{2}(6) = 3\sqrt{3}$$

Entonces el área del hexágono inscrito es

$$\mathrm{A_I} = \frac{1}{2}nla = \frac{1}{2}(6)(6)\left(3\sqrt{3}\right) = 54\sqrt{3}$$

Para el hexágono circunscrito los elementos se muestran en la figura siguiente





Para este hexágono el apotema es igual al radio y se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular l

$$r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$l^2 - \frac{l^2}{4} = r^2$$

$$\frac{3l^2}{4} = r^2$$

$$l = \sqrt{\frac{4r^2}{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}(6) = 4\sqrt{3}$$

Entonces el área del hexágono circunscrito es

$$\mathrm{A_S} = \frac{1}{2}nla = \frac{1}{2}(6)\left(4\sqrt{3}\right)(6) = 72\sqrt{3}$$

Finalmente, el área sombreada es

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \mathrm{A_S} - \mathrm{A_I} \\ &= 72\sqrt{3} - 54\sqrt{3} \\ &= 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

Respuesta:

El área sombreada es $18\sqrt{3}$