PROBLEMA RESUELTO 2

Obtenga la ecuación general de la hipérbola horizontal que tiene su centro en el punto $(-3,1)$, tiene excentricidad $e = \frac{4}{3}$ y eje conjugado de longitud 4.

Solución

Como es una hipérbola horizontal con centro en el punto $C(h,k) = (-3,1)$, la ecuación estándar tiene la forma

$$\frac{(x+3)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

La excentricidad es $e = \frac{4}{3}$, entonces

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$

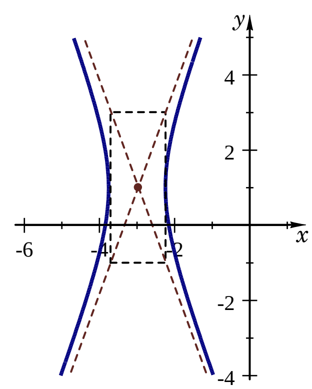
$$c = \frac{4a}{3}$$

Además se tiene que la longitud del eje conjugado es 4, entonces

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la hipérbola que satisface las condiciones dadas



Ahora se utiliza la relación $c^2 = a^2 + b^2$, para obtener el valor de a

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{4a}{3}\right)^2 = a^2 + (2)^2$$

$$\frac{16a^2}{9} - a^2 = 4$$

$$16a^2 - 9a^2 = 4$$

$$a^2 = \frac{4}{7}$$

Por lo que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x+3)^2}{\frac{4}{7}} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{7(x+3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Multiplicando ambos lados por 4 y desarrollando los cuadrados se obtiene

$$7(x+3)^2 - (y-1)^2 = 4$$

$$7(x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 2y + 1) = 4$$

$$7x^2 - y^2 + 42x + 2y + 63 - 1 - 4 = 0$$

$$7x^2 - y^2 + 42x + 2y + 58 = 0$$