

PROBLEMA RESUELTO 1

Obtenga el centro, los vértices, los focos, asíntotas y dibuje la gráfica de la hipérbola cuya ecuación general es

$$4x^2 - 9y^2 - 16x + 54y - 29 = 0$$

Solución

Agrupando términos y completando cuadrados se tiene

$$(4x^2 - 16x) - (9y^2 - 54y) = 29$$

$$4(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 6y) = 29$$

$$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 6y + 9) = 29 + 4(4) - 9(9)$$

$$4(x - 2)^2 - 9(y - 3)^2 = -36$$

Dividiendo ambos lados entre -36 para obtener 1 en el lado derecho

$$\frac{4(x - 2)^2}{-36} - \frac{9(y - 3)^2}{-36} = \frac{-36}{-36}$$

$$\frac{(y - 3)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{9} = 1$$

Que es la ecuación de una hipérbola vertical, pues el término que contiene la variable y es positivo, su centro está en el punto $C(h,k) = (2,3)$

$$a^2 = 4$$

$$b^2 = 9$$

$$a = \sqrt{4} = 2$$

$$b = \sqrt{9} = 3$$

Las coordenadas de los vértices son

$$V_1 = (h, k - a) = (2, 3 - 2) = (2, 1)$$

$$V_2 = (h, k + a) = (2, 3 + 2) = (2, 5)$$

Para calcular las coordenadas de los focos primero se calcula el valor de c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= 4 + 9 = 13$$

$$c = \sqrt{13}$$

Las coordenadas de los focos son

$$F_1 = (h, k - c) = (2, 3 - \sqrt{13})$$

$$F_2 = (h, k + c) = (2, 3 + \sqrt{13})$$

Las ecuaciones de las asíntotas en una hipérbola vertical son

$$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$$

$$y - 3 = \pm \frac{2}{3}(x - 2)$$

Despejando y se obtiene

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$$

La gráfica de la hipérbola es

