PROBLEMA RESUELTO 4

Demuestre la identidad trigonométrica

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1+\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}$$

Solución

Para demostrar una identidad que contiene sumas o múltiplos de ángulos, se sugiere utilizar la identidad correspondiente. En este caso hay que utilizar la identidad

$$\tan(\theta+\beta)=\frac{\tan\theta+\tan\beta}{1-\tan\theta\tan\beta}$$

Al aplicar la identidad en este problema se tiene

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan x}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan x}$$

como se sabe que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)&=\frac{1+\tan x}{1-1\tan x}\\&=\frac{1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}\\&=\frac{\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x}}=\frac{(\cos x+\operatorname{sen}x)\cos x}{\cos x(\cos x-\operatorname{sen}x)}\\&=\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}\end{aligned}$$

Multiplicando por el conjugado del denominador se tiene

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)&=\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}\\&=\frac{\cos^2 x+2\operatorname{sen}x\cos x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}\\&=\frac{1+2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando las identidades $\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cos x$ y $\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1+\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}$$