PROBLEMA RESUELTO 3

Demuestre la identidad trigonométrica

$$\frac{(\operatorname{sen} t + 1)^2}{\cos^2 t} = \frac{\sec t + \tan t}{\sec t - \tan t}$$

Solución

Trabajando con el lado derecho, expresando las funciones en términos de senos y cosenos y simplificando

$$\begin{aligned}
\frac{(\operatorname{sen} t + 1)^2}{\cos^2 t} &= \frac{\sec t + \tan t}{\sec t - \tan t} \\
&= \frac{\dfrac{1}{\cos t} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}{\dfrac{1}{\cos t} - \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}} \\
&= \frac{\dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{\cos t}}{\dfrac{1 - \operatorname{sen} t}{\cos t}} \\
&= \frac{\cos t(1 + \operatorname{sen} t)}{\cos t(1 - \operatorname{sen} t)} \\
&= \frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t}
\end{aligned}$$

En este punto, la expresión ya está completamente simplificada y no hemos completado la demostración. Lo que resuelve el problema es multiplicar y dividir por el conjugado del numerador

$$\begin{aligned}
\frac{(\operatorname{sen} t + 1)^2}{\cos^2 t} &= \frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t} \\
&= \frac{\left(1 + \operatorname{sen} t\right)^2}{1 - \operatorname{sen}^2 t} \\
\frac{(\operatorname{sen} t + 1)^2}{\cos^2 t} &= \frac{\left(1 + \operatorname{sen} t\right)^2}{\cos^2 t}
\end{aligned}$$

Quedando demostrada la identidad