PROBLEMA RESUELTO 2

Resuelva la ecuación trigonométrica

$$2\tan t + \sec^2 t = 0$$

Solución

Observe que la ecuación no se puede factorizar, y será necesario alguna sustitución trigonométrica para poder despejar las funciones trigonométricas.

Utilizando la identidad $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ y desarrollando las operaciones resultantes se tiene

$$\begin{aligned} 2\tan t + \sec^2 t &= 0 \\ 2\tan t + \left(1 + \tan^2 t\right) &= 0 \\ 2\tan t + 1 + \tan^2 t &= 0 \\ \tan^2 t + 2\tan t + 1 &= 0 \end{aligned}$$

factorizando el trinomio cuadrado perfecto

$$(\tan t + 1)^2 = 0$$

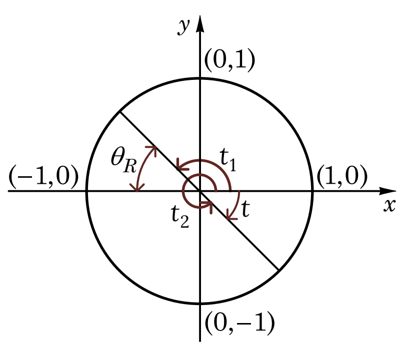
De donde se obtiene que

$$\tan t = -1$$

Al utilizar la calculadora para obtener una de las soluciones se tiene

$$t = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

La función tangente es negativa en el segundo y cuarto cuadrante, como se muestra en el circulo trigonométrico



El ángulo de referencia es

$$\theta_R = \frac{\pi}{4}$$

Por lo que las dos soluciones positivas, una en el segundo cuadrante y otra en el cuarto cuadrante

$$t_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$t_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Observe que las soluciones se encuentran en cuadrantes opuestos, lo cual siempre sucede para la función tangente, razón por la cual la segunda solución puede obtener sumando π a la primera solución

$$t_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}$$

La solución general de la ecuación se obtiene sumando un múltiplo del período de la función a una solución particular, es decir que la solución general es

$$t = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$$

en donde k es cualquier número entero. Observe que si $k = 0$ se obtiene t_1, mientras que si $k = 1$, se obtiene la solución t_2. Al dar otros valores a k se obtienen otras soluciones de la ecuación. Puede verificar que cuando $k = -1$ se obtiene la solución proporcionada por la calculadora.

Respuesta

La solución general es

$$t = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$$