PROBLEMA RESUELTO 1

Resuelva la ecuación trigonométrica

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Solución

Para resolver esta ecuación primero hay que despejar las funciones trigonométricas. Trasladando la función en el lado derecho al lado izquierdo y luego factorizando

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \cos\theta$$

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta\left(2\operatorname{sen}\theta - 1\right) = 0$$

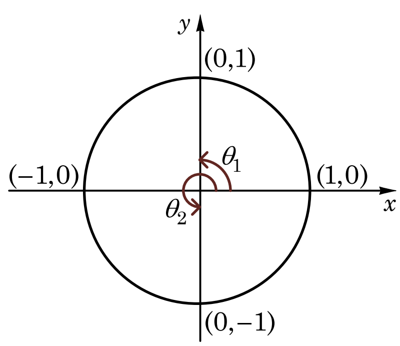
Al igualar a cero cada uno de los factores se obtiene

$$\cos\theta = 0 \qquad\qquad 2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$$

$$2\operatorname{sen}\theta = 1$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

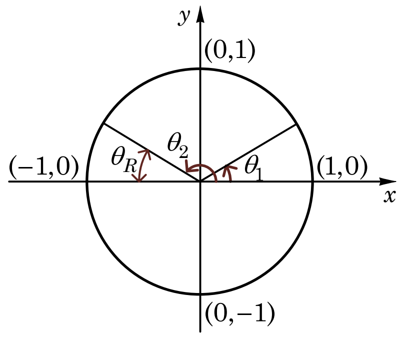
Para obtener todos los ángulos tales que $\cos\theta = 0$, se utilizará como ayuda un círculo trigonométrico



En el círculo trigonométrico $\cos\theta = x$, y cuando $x = 0$ el ángulo es

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ y } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Para obtener los ángulos tales que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, primero observe que el seno es positivo en el primer y segundo cuadrante, como se muestra en el círculo trigonométrico siguiente



Al obtener uno de los ángulos con una calculadora se tiene

$$\theta_1 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

La calculadora solamente da una de las dos soluciones, para obtener la otra solución, primero se debe calcular el ángulo de referencia θ_R. Al observar el círculo trigonométrico es claro que

$$\theta_R = \theta_1 = \frac{\pi}{6}$$

Ahora se puede calcular la segunda solución

$$\theta_2 = \pi - \theta_R = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$ son

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6}$$