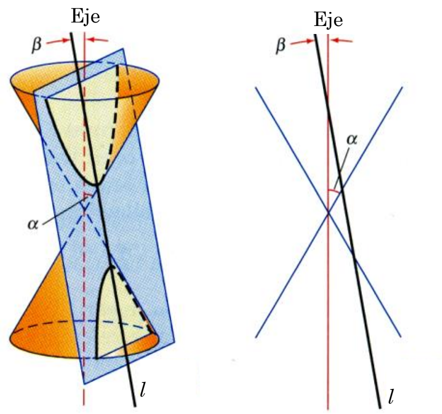
7.3 Hipérbolas

OBJETIVOS

- Encontrar la ecuación estándar de una hipérbola dada su ecuación general.
- Encontrar la ecuación de una hipérbola dados algunos de sus elementos.
- Dibujar la gráfica de una hipérbola a partir de su ecuación estándar
- Resolver problemas en donde el modelo es la ecuación de una hipérbola.

Una hipérbola es otra de las secciones cónicas formada cuando un plano intersecta un cono circular recto. Si β es el ángulo de inclinación del plano forma con el eje del cono y α es el ángulo mostrado en la figura; una hipérbola se forma cuando $0^{o} < \beta < \alpha$, o bien cuando el plano es paralelo al eje del cono.

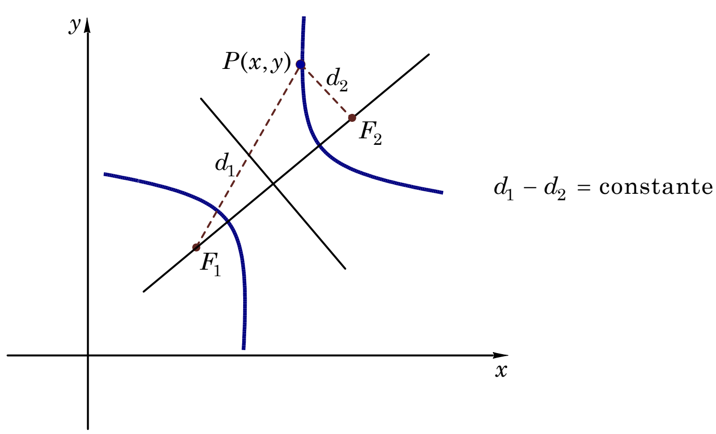


Así como las otras cónicas, la hipérbola puede ser definida en términos de un conjunto de puntos del plano.

Definición de Hipérbola

Una hipérbola está formada por todos los puntos del plano $P(x, y)$, tales que la diferencia entre las distancias de P a dos puntos fijos (llamados focos) es una constante positiva.

La siguiente figura muestra la gráfica de una hipérbola en el contexto de su definición



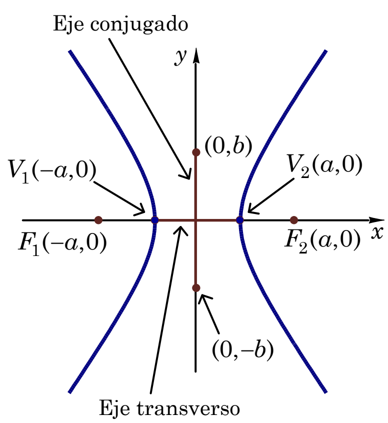
En esta sección se restringe el estudio a las hipérbolas horizontales y verticales, es decir aquellas que tienen sus ejes paralelos a los ejes coordenados, estas son llamadas hipérbola horizontal e hipérbola vertical.

Hipérbolas con centro en el origen $(0,0)$

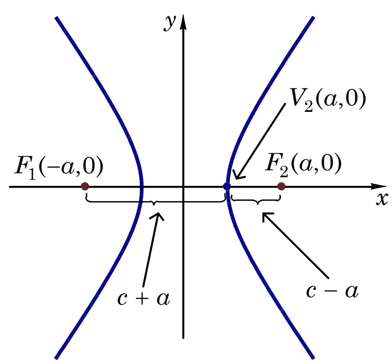
La siguiente figura muestra una hipérbola horizontal con centro en el origen. El **eje transverso** es el segmento de recta que va del vértice $V_1(-a,0)$ al vértice $V_2(a,0)$ y que tiene como punto medio el centro de la hipérbola. La longitud del eje transverso es $2a$.

El **eje conjugado** es el segmento de recta que pasa por el centro de la hipérbola, es perpendicular al eje transverso y tiene extremos en los puntos $(0,-b)$ y $(0,b)$. La longitud del eje conjugado es $2b$.

Los focos de la hipérbola se localizan en los puntos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, la distancia entre los dos focos es $2c$.



Para determinar el valor de la constante positiva en la definición de la hipérbola, considere el vértice $V_2(a,0)$ y los focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$. Como se muestra en la siguiente figura $c-a$ es la distancia del vértice $V_2(a,0)$ al foco $F_2(c,0)$ y $c+a$ es la distancia del vértice $V_2(a,0)$ al foco $F_1(-c,0)$. Puesto que el vértice es un punto de la hipérbola, el valor absoluto de la diferencia de estas distancias debe ser igual a la constante de la definición.



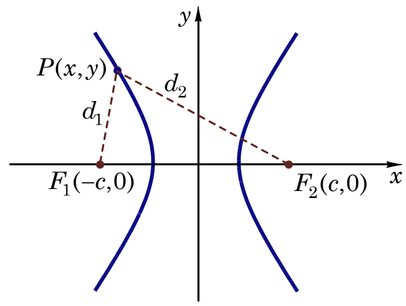
$$|(c+a)-(c-a)| = \text{constante}$$

$$|2a| = \text{constante}$$

$$2a = \text{constante}$$

De donde se puede ver claramente que el valor de la constante en una hipérbola, al igual que en la elipse es igual a $2a$. El valor absoluto se ha utilizado para garantizar que la constante sea positiva.

Para obtener una ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen considere la siguiente figura en donde $P(x,y)$ es un punto de la hipérbola.



Utilizando la definición de hipérbola se tiene

$$|d_1(P,F_1) - d_2(P,F_2)| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Elevando ambos lados al cuadrado se tiene

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 2a$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2$$

Desarrollando operaciones y aislando el radical se tiene

$$2x^2 + 2c^2 + 2y^2 = 4a^2 + 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando nuevamente ambos lados al cuadrado y simplificando

$$x^4 + y^4 + c^4 + 4a^4 + 2x^2y^2 + 2x^2c^2 - 4x^2a^2 + 2y^2c^2 - 4y^2a^2 - 4c^2a^2 = x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 - 2x^2c^2 + 2y^2c^2$$

$$4a^2 - 4x^2a^2 + 4x^2c^2 - 4y^2a^2 - 4c^2a^2 = 0$$

$$4x^2c^2 - 4x^2a^2 - 4y^2a^2 = 4c^2a^2 - 4a^4$$

$$x^2c^2 - x^2a^2 - y^2a^2 = c^2a^2 - a^4$$

Agrupando términos y tomando factorizando

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dividiendo ambos lados entre $a^2(c^2 - a^2)$ se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Finalmente, haciendo la sustitución $b^2 = c^2 - a^2$ se obtiene la ecuación estándar de la hipérbola horizontal con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En el cuadro siguiente se presenta la ecuación de la hipérbola horizontal y sus elementos principales.

ECUACIÓN ESTÁNDAR DE LA HIPÉRBOLA HORIZONTAL CON VÉRTICE EN EL ORIGEN

La ecuación estándar de una hipérbola horizontal con centro en el origen está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Donde: $c^2 = a^2 + b^2$

Centro: $C(0,0)$

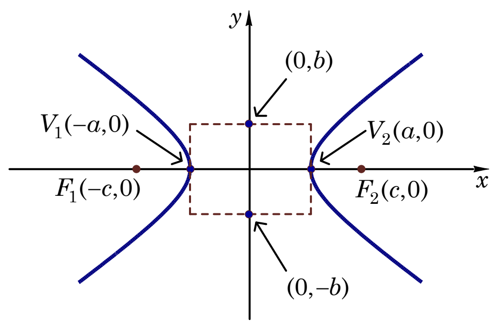
Longitud del eje transverso = $2a$

Longitud del eje conjugado = $2b$

Vértices: $(-a,0)$ y $(a,0)$

Focos: $(-c,0)$ y $(c,0)$

En la figura siguiente se ilustran los elementos de una hipérbola horizontal



Para una hipérbola vertical la ecuación estándar es la que se presenta en el cuadro siguiente

ECUACIÓN ESTÁNDAR DE LA ELIPSE VERTICAL CON VÉRTICE EN EL ORIGEN

La ecuación estándar de una hipérbola vertical con centro en el origen está dada por

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

Donde: $c^2 = a^2 + b^2$

Centro: $C(0,0)$

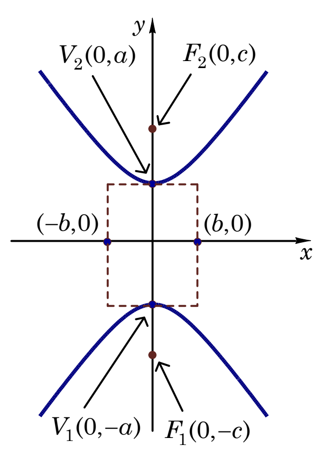
Longitud del eje transverso = $2a$

Longitud del eje conjugado = $2b$

Vértices: $(0,-a)$ y $(0,a)$

Focos: $(0,-c)$ y $(0,c)$

En la figura siguiente se ilustran los elementos de una elipse vertical



Ejemplo 1: Obtener los vértices, focos y dibujar la gráfica de una hipérbola

Obtenga los vértices, focos y dibuje la gráfica de la elipse

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

Solución

Dividiendo ambos lados entre 144 para obtener la ecuación en forme estándar

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación corresponde a una hipérbola horizontal ya que el término que contiene la variable x es positivo

$$a^2 = 16 \qquad b^2 = 9$$

$$a = 4 \qquad b = 3$$

Ahora podemos calcular el valor de c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= 16 + 9 = 25$$

$$c = \sqrt{25} = 5$$

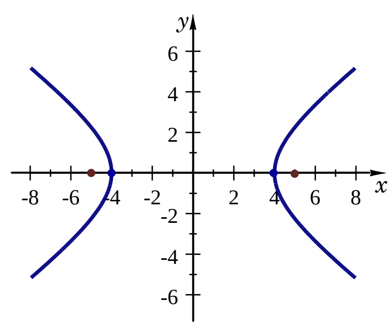
Las coordenadas de los vértices son

$$(-a,0) = (-4,0) \quad \text{y} \quad (a,0) = (4,0)$$

Las coordenadas de los focos son

$$(-c,0) = (-5,0) \quad \text{y} \quad (c,0) = (5,0)$$

La gráfica de la hipérbola se muestra en la siguiente figura



Todas las hipérbolas tienen dos **asíntotas** que pasan por el centro de la hipérbola. Las asíntotas son de mucha utilizad para trazar la gráfica de la hipérbola.

Asíntotas de una hipérbola con centro en el origen

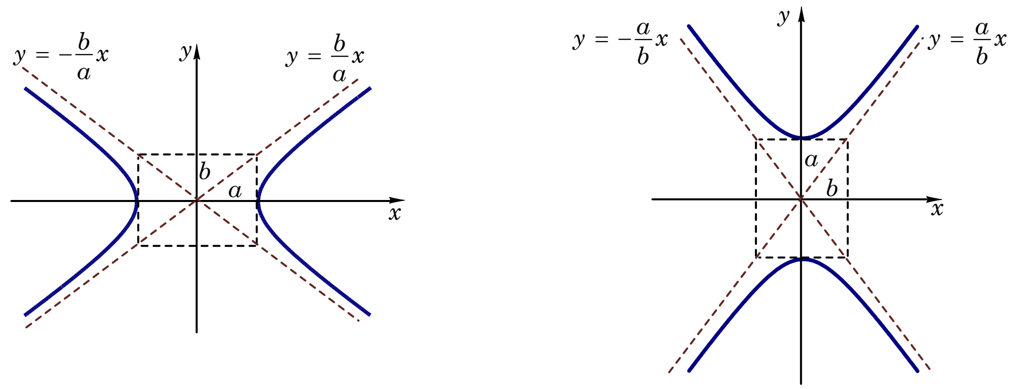
Las asíntotas de la hipérbola horizontal $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, están dadas por las ecuaciones

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Las asíntotas de la hipérbola vertical $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, están dadas por las ecuaciones

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de una hipérbola horizontal y una vertical con sus respectivas asíntotas,



Un método práctico para obtener las ecuaciones de las asíntotas consiste en escribir la ecuación de la hipérbola en forma estándar, pero reemplazando el 1 por 0 y luego despejar el valor de y. Para el caso de la hipérbola horizontal se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Y para el caso de la hipérbola vertical las asíntotas se obtienen de la forma siguiente

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$$

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2$$

$$y = \pm\frac{a}{b}x$$

Para dibujar la gráfica de la hipérbola se recomienda trazar primero las asíntotas y luego trazar una curva que pase por el vértice y que luego se vaya aproximando a las asíntotas a medida que la curva se aleja del centro de la hipérbola.

Ejemplo 2: Obtener los vértices, focos y asíntotas de una hipérbola

Obtenga los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola cuya ecuación está dada. Dibuje la gráfica

$$4y^2 - 9x^2 = 36$$

Solución

Dividiendo ambos lados entre 36 para obtener la ecuación en forme estándar

$$\frac{4y^2}{36} - \frac{9x^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

La ecuación corresponde a una hipérbola vertical ya que el término que contiene la variable y es positivo

$$a^2 = 9 \qquad b^2 = 4$$

$$a = 3 \qquad b = 2$$

Ahora podemos calcular el valor de c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= 9 + 4 = 13$$

$$c = \sqrt{13}$$

Las coordenadas de los vértices son

$$(0,-a) = (0,-3) \quad \text{y} \quad (0,a) = (0,3)$$

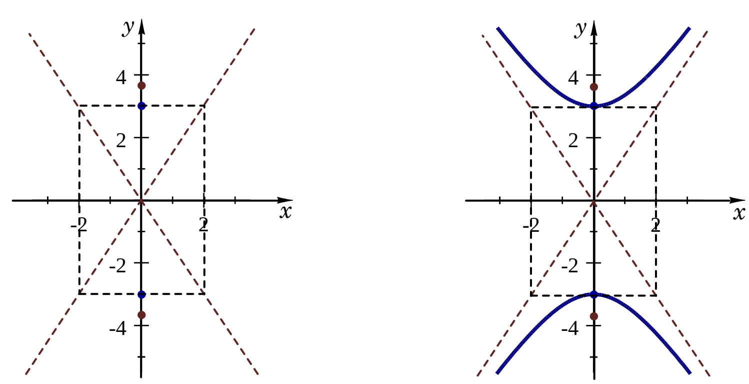
Las coordenadas de los focos son

$$(0,-c) = (0,-\sqrt{13}) \quad \text{y} \quad (0,c) = (0,\sqrt{13})$$

Las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = \frac{a}{b}x = \frac{3}{2}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x = -\frac{3}{2}x$$

Para dibujar la representación gráfica se recomienda dibujar primero las asíntotas como se muestra en la figura de la izquierda, luego trace la gráfica de la hipérbola, de tal forma que pase por el vértice y se aproxime a las asíntotas cuando la curva se aleja del origen, como se muestra en la figura de la derecha



Ejemplo 3: Obtener la ecuación de una hipérbola dados algunos elementos de ella

Obtenga la ecuación de la hipérbola que tiene focos en los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$. Longitud del eje conjugado igual a 4.

Solución

Como los focos están sobre el eje y, la hipérbola es vertical. El centro se localiza en el punto medio de los focos, que en éste caso es el origen.

Por lo tanto la ecuación que se busca tiene la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Como un c es la distancia del centro a los focos se tiene que

$$c = 3$$

Como la longitud del eje conjugado es igual a $2b$ se tiene que

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

El valor de a se calcula como sigue

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = (3)^2 - (2)^2 = 5$$

$$a = \sqrt{5}$$

Por lo que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$$

Hipérbolas con vértice en el punto (h,k)

La ecuación de una hipérbola horizontal o vertical con centro en el punto (h,k) se puede obtener utilizando los conceptos de traslación horizontal y vertical discutidos en la unidad de funciones.

Si en la ecuación de la hipérbola horizontal con vértice en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se reemplaza x por $x - h$ y se reemplaza y por $y - k$ el centro de la hipérbola se traslada al punto $C(h,k)$. La ecuación trasladada de la hipérbola horizontal será

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

De manera similar se puede obtener la ecuación trasladada para la hipérbola vertical. A continuación se presentan las ecuaciones de las hipérbolas trasladadas, así como un resumen de sus elementos principales.

ECUACIÓN ESTÁNDAR DE LA HIPÉRBOLA HORIZONTAL CON CENTRO EN (h,k)

La ecuación estándar de la hipérbola horizontal con centro en el punto $C(h,k)$ es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

Donde: $c^2 = a^2 + b^2$

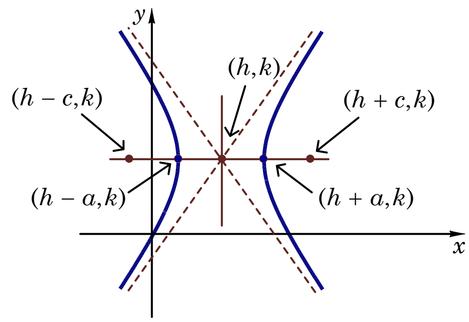
Longitud del eje transverso = $2a$ Longitud del eje conjugado = $2b$

Centro: $C(h,k)$ Vértices: $(h+a,k)$ y $(h-a,k)$

Focos: $(h+c,k)$ y $(h-c,k)$

Ecuaciones de las asíntotas: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$

La figura siguiente muestra la gráfica de una hipérbola horizontal con centro en el punto (h,k)



ECUACIÓN ESTÁNDAR DE LA HIPÉRBOLA VERTICAL CON CENTRO EN (h,k)

La ecuación estándar de la hipérbola vertical con centro en el punto $C(h,k)$ es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,$$

Donde: $c^2 = a^2 + b^2$

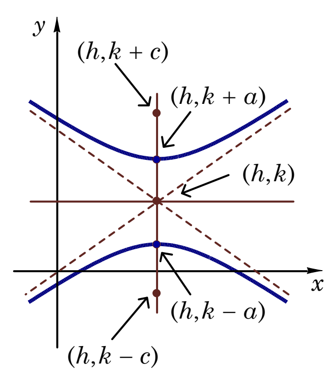
Longitud del eje transverso = $2a$ Longitud del eje conjugado = $2b$

Centro: $C(h,k)$ Vértices: $(h,k+a)$ y $(h,k-a)$

Focos: $(h,k+c)$ y $(h,k-c)$

Ecuaciones de las asíntotas: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$

La figura siguiente muestra la gráfica de una hipérbola vertical con centro en el punto (h,k)



Ecuación general de la hipérbola

La ecuación general de las cónicas trasladadas

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Es una hipérbola si A y B tienen signos opuestos. Si al completar cuadrados en el lado derecho de la ecuación se obtiene cero, la ecuación corresponde a dos rectas.

Ejemplo 4: Obtener el centro, vértices y focos de una hipérbola

Obtenga el centro, los vértices, los focos y dibuje la gráfica de la hipérbola cuya ecuación general es

$$4x^2 - 9y^2 - 16x + 54y - 29 = 0$$

Solución

Agrupando términos y completando cuadrados se tiene

$$(4x^2 - 16x) - (9y^2 - 54y) = 29$$

$$4(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 6y) = 29$$

$$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 6y + 9) = 29 + 4(4) - 9(9)$$

$$4(x - 2)^2 - 9(y - 3)^2 = -36$$

Dividiendo ambos lados entre −36 para obtener 1 en el lado derecho

$$\frac{4(x-2)^2}{-36} - \frac{9(y-3)^2}{-36} = \frac{-36}{-36}$$

$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

Que es la ecuación de una hipérbola vertical, pues el término que contiene la variable y es positivo con centro $C(h,k) = (2,3)$

$$a^2 = 4 \qquad\qquad b^2 = 9$$

$$a = \sqrt{4} = 2 \qquad\qquad b = \sqrt{9} = 3$$

Las coordenadas de los vértices son

$$V_1 = (h, k - a) = (2, 3 - 2) = (2,1)$$

$$V_2 = (h, k + a) = (2, 3 + 2) = (2,5)$$

Para calcular las coordenadas de los focos primero se calcula el valor de c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= 4 + 9 = 13$$

$$c = \sqrt{13}$$

Las coordenadas de los focos son

$$F_1 = (h, k - c) = (2, 3 - \sqrt{13})$$

$$V_2 = (h, k + c) = (2, 3 + \sqrt{13})$$

Las ecuaciones de las asíntotas son

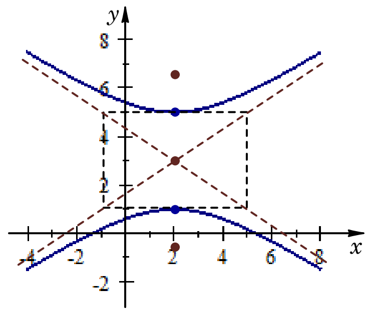
$$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$$

$$y - 3 = \pm\frac{2}{3}(x - 2)$$

Despejando y se obtiene

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$$

La gráfica de la elipse se muestra en la figura en la página siguiente



Excentricidad de la hipérbola

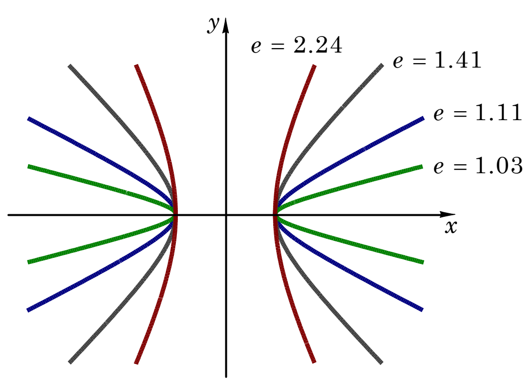
Los arcos de la gráfica de una hipérbola pueden ser muy abiertos o muy estrechos. La excentricidad es una medida de la amplitud de la hipérbola.

EXCENTRICIDAD DE UNA HIPÉRBOLA

La excentricidad de una hipérbola se define como la razón de c a a, donde c es la distancia del centro al foco y a es la distancia del centro a los vértices, es decir

$$e = \frac{c}{a}, \qquad e > 1$$

Como en una hipérbola $c > a$, se tiene que la excentricidad es siempre mayor que uno 1. Cuando la excentricidad de la hipérbola se aproxima a 1, los arcos de la hipérbola son muy estrechos; mientras que cuando se incrementa los arcos de la hipérbola son muy abiertos. La siguiente figura muestra varias hipérbolas y su excentricidad



Ejemplo 5: Obtener la ecuación de una hipérbola

Obtenga la ecuación general de la hipérbola horizontal que tiene su centro en el punto $(-3,1)$, tiene excentricidad $e = \frac{4}{3}$ y eje conjugado de longitud 4.

Solución

Como es una hipérbola horizontal con centro en el punto $C(h,k) = (-3,1)$, la ecuación estándar tiene la forma

$$\frac{(x+3)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

Le excentricidad es $e = \frac{4}{3}$, entonces

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$
$$c = \frac{4a}{3}$$

Además se tiene que la longitud del eje conjugado es 4, entonces

$$2b = 4$$
$$b = 2$$

Ahora se utiliza la relación $c^2 = a^2 + b^2$, para obtener el valor de a

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\left(\frac{4a}{3}\right)^2 = a^2 + (2)^2$$
$$\frac{16a^2}{9} - a^2 = 4$$
$$16a^2 - 9a^2 = 4$$
$$a^2 = \frac{4}{7}$$

Por lo que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x+3)^2}{\frac{4}{7}} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$
$$\frac{7(x+3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Multiplicando ambos lados por 4 y desarrollando los cuadrados se obtiene

$$7(x+3)^2 - (y-1)^2 = 4$$
$$7(x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 2y + 1) = 4$$
$$7x^2 - y^2 + 42x + 2y + 63 - 1 - 4 = 0$$
$$7x^2 - y^2 + 42x + 2y + 58 = 0$$

Ejercicios de la sección 7.

En los ejercicios 1 a 20 encuentre el centro, los vértices, los focos, asíntotas y dibuje la gráfica de la hipérbola cuya ecuación está dada.

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2. $\frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

3. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$

4. $\frac{4y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

5. $\frac{x^2}{9} - \frac{9y^2}{25} = 1$

6. $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

7. $\frac{(y+3)^2}{49} - \frac{x^2}{4} = 1$

8. $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

9. $\frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x+5)^2}{16} = 1$

10. $\frac{9(x+5)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

11. $x^2 - 4y^2 = 16$

12. $16y^2 - 9x^2 = 144$

13. $9y^2 - 36x^2 = 4$

14. $16x^2 - 25y^2 = 9$

15. $x^2 - y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$

16. $4x^2 - 25y^2 + 16x + 50y - 109 = 0$

17. $9y^2 - 4x^2 + 36y - 8x + 68 = 0$

18. $16x^2 - 9y^2 - 32x - 54y + 79 = 0$

19. $4x^2 - y^2 - 32x + 6y + 39 = 0$

20. $2y^2 - 9x^2 + 36x - 8y + 46 = 0$

En los ejercicios 21 al 40 encuentre la ecuación general de la hipérbola a partir de la información dada. Dibuje su gráfica.

21. Vértices en los puntos $(3,0)$ y $(-3,0)$, un foco en el punto $(-4,0)$.

22. Vértices en los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$, un foco en el punto $(0,4)$.

23. Focos en $(0,5)$ y $(0,-5)$, asíntotas $y = 2x$ y $y = -2x$.

24. Focos en $(4,0)$ y $(-4,0)$, asíntotas $y = x$ y $y = -x$.

25. Vértices en los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$, pasando por el punto $(2,4)$.

26. Vértices en los puntos $(5,0)$ y $(-5,0)$, pasando por el punto $(-1,3)$.

27. Asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}x$ Vértices en los puntos $(0,4)$ y $(0,-4)$.

28. Asíntotas $y = \pm\frac{2}{3}x$ Vértices en los puntos $(6,0)$ y $(-6,0)$.

29. Vértices en los puntos $(6,3)$ y $(2,3)$, focos en $(7,3)$ y $(1,3)$.

30. Vértices en los puntos $(-1,5)$ y $(-1,-1)$, focos en $(-1,7)$ y $(-1,-3)$.

31. Focos en $(1,-2)$ y $(7,-2)$ pendiente de una de las asíntotas 5/4.

32. Focos en $(-3,-6)$ y $(-3,-2)$ pendiente de una de las asíntotas 1.

33. Pasa por el punto $(9,4)$, pendiente de una asíntota 1/2, centro en el punto $(7,2)$, eje transverso paralelo al eje y.

34. Pasa por el punto $(6,1)$, pendiente de una asíntota 2, centro en el punto $(3,3)$, eje transverso paralelo al eje x.

35. Vértices en $(1,6)$ y $(1,8)$, excentricidad 2

36. Vértices en $(2,3)$ y $(-2,3)$, excentricidad 5/2.

37. Excentricidad 2, focos en los puntos $(4,0)$ y $(-4,0)$.

38. Excentricidad 4/3, focos en los puntos $(0,-6)$ y $(0,6)$.

39. Centro en $(4,1)$, eje conjugado de longitud 4 paralelo al eje y, excentricidad 4/3.

40. Centro en $(-3,-3)$, eje conjugado de longitud 6 paralelo al eje x, Excentricidad 2,