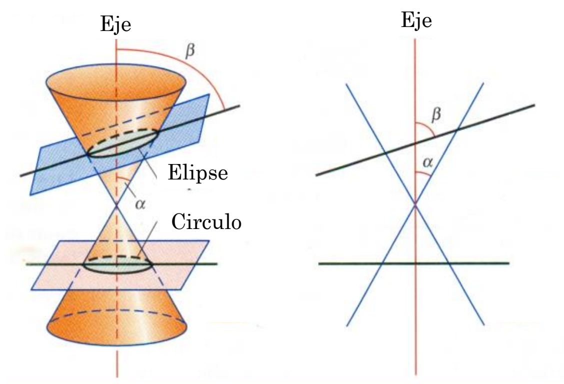
7.2 Elipses

OBJETIVOS

- Encontrar la ecuación estándar de una elipse dada su ecuación general.
- Encontrar la ecuación de una elipse dados algunos de sus elementos..
- Dibujar la gráfica de una elipse a partir de su ecuación estándar
- Resolver problemas en donde el modelo es la ecuación de una elipse.

Una elipse es otra de las secciones cónicas formada cuando un plano intersecta un cono circular recto. Si β es el ángulo de inclinación del plano forma con el eje del cono y α es el ángulo mostrado en la figura; una elipse es formada cuando $\alpha < \beta < 90°$. Si $\beta = 90°$ se forma un círculo.

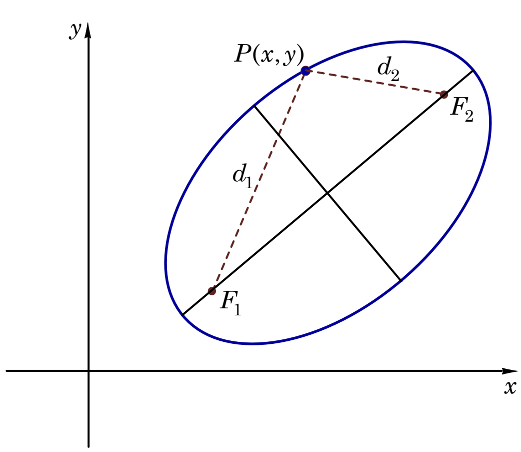


Como se hizo con la parábola, la definición de elipse se puede hacer en términos de cierto conjunto de puntos del plano.

Definición de Elipse

Una elipse está formada por todos los puntos $P(x, y)$ del plano, tales que la suma de las distancias de P a dos puntos fijos (llamados focos) es una constante positiva.

La siguiente figura muestra la gráfica de una elipse en el contexto de su definición

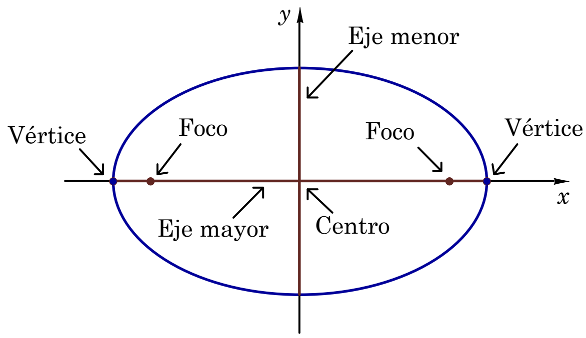


$d_1 + d_2 = \text{constante}$

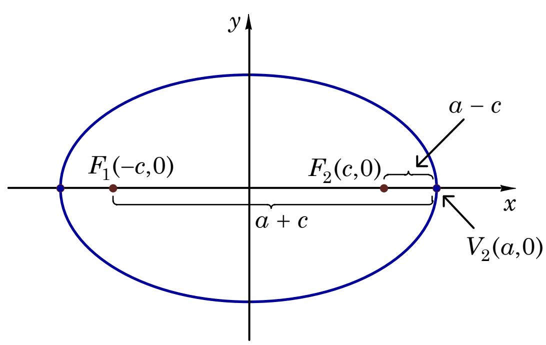
En esta sección se restringe el estudio a las elipses horizontales y verticales, es decir aquellas que tienen sus ejes paralelos a los ejes coordenados, estas son llamadas elipse horizontal y elipse vertical.

Elipses con centro en el origen $(0,0)$

La gráfica de una elipse tiene dos ejes de simetría. El eje más largo es llamado **eje mayor**; los focos de la elipse están sobre el eje mayor. El eje más corto es llamado **eje menor.** La longitud del eje mayor se denota por $2a$, mientras que la longitud del eje menor se denota por $2b$. **El semieje mayor** es la mitad del eje mayor y tiene una longitud de a y el **semieje menor** es la mitad del eje menor y tiene longitud b. El **centro** de la elipse es el punto medio del eje mayor. Los puntos extremos del eje mayor son los **vértices** de la elipse.



Considere el punto $V_2(a,0)$, que son las coordenadas de uno de los vértices de la elipse horizontal con vértice en el origen y considere también los puntos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$ que son las coordenadas de los focos, como se muestra en la siguiente figura. La distancia de F_1 a V_2 es $a+c$, mientras que la distancia de F_2 a V_2 es $a-c$



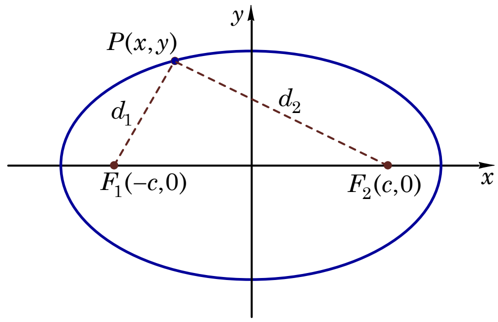
De la definición de elipse, la suma de distancias de cualquier punto a los focos es una constante, como V_2 es un punto de la elipse, se tiene que las distancias a los focos son $a+c$ y $a-c$. Por lo tanto la suma de distancias está dada por

$$(a+c)+(a-c)=2a$$

Que es la constante referida en la definición y es igual a $2a$, la longitud del eje mayor.

Para obtener una ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen considere la siguiente figura en donde $P(x,y)$ es un punto de la elipse. Utilizando la definición de elipse se tiene

$$\begin{aligned} d_1(P,F_1)+d_2(P,F_2) &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \end{aligned}$$



Trasladando el segundo radical a restar al lado derecho y elevando ambos lados al cuadrado se tiene

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Desarrollando los binomios y sumando términos semejantes

$$\begin{aligned}
x^2+2cx+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2\\
4cx-4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
\left(cx-a^2\right)^2 &= \left(-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\\
c^2x^2-2cxa^2+a^4 &= a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)\\
c^2x^2-2cxa^2+a^4 &= a^2x^2-2cxa^2+a^2c^2+a^2y^2\\
c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 &= a^2c^2-a^4
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por -1 y factorizando se obtiene

$$\begin{aligned}
a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 &= a^4-a^2c^2\\
(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2)
\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $b^2=a^2-c^2$ y dividiendo ambos lados entre a^2b^2 se obtiene

$$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Que es la ecuación de una elipse horizontal con centro en el origen.

Ecuación estándar de la elipse horizontal con vértice en el origen

La ecuación estándar de una elipse horizontal con centro en el origen está dada por

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\qquad a>b$$

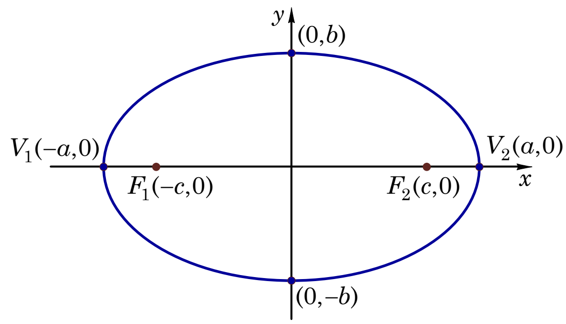
Donde: $c^2=a^2-b^2$

Longitud del eje mayor = $2a$ Longitud del eje menor = $2b$

Centro: $C(0,0)$ Vértices: $(-a,0)$ y $(a,0)$

Focos: $(-c,0)$ y $(c,0)$

En la siguiente figura se ilustran los elementos de una elipse horizontal



ECUACIÓN ESTÁNDAR DE LA ELIPSE VERTICAL CON VÉRTICE EN EL ORIGEN

La ecuación estándar de una elipse vertical con centro en el origen está dada por

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1\,, \qquad a > b$$

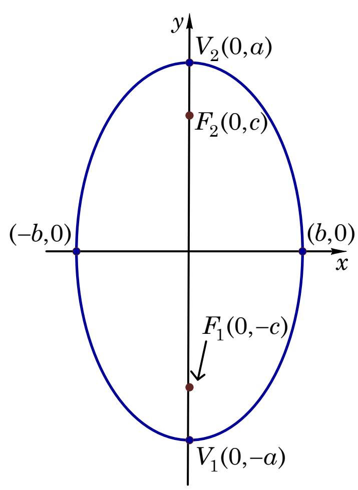
Donde: $c^2 = a^2 - b^2$

Longitud del eje mayor = $2a$ Longitud del eje menor = $2b$

Centro: $C(0,0)$ Vértices: $(0,-a)$ y $(0,a)$

Focos: $(0,-c)$ y $(0,c)$

En la siguiente figura se ilustran los elementos de una elipse vertical



Ejemplo 1: Obtener los vértices, focos y dibujar la gráfica de una elipse

Obtenga los vértices, focos y dibuje la gráfica de la elipse

$$25x^2 + 49y^2 = 225$$

Solución

Dividiendo ambos lados entre 225 para obtener la ecuación en forme estándar

$$\frac{25x^2}{1225} + \frac{49y^2}{1225} = \frac{1225}{1225}$$

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$$

La ecuación corresponde a una elipse horizontal ya que

$$a^2 = 49 \qquad b^2 = 25$$

$$a = 7 \qquad b = 5$$

Como a está debajo del término en x la elipse es horizontal

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$= 49 - 25 = 24$$

$$c = \sqrt{24} = \sqrt{(4)(6)} = 2\sqrt{6}$$

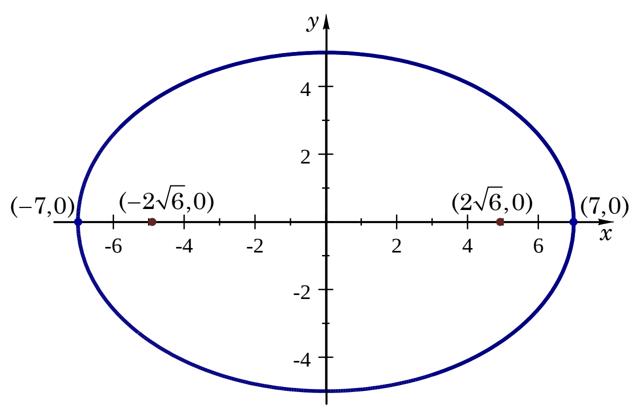
Las coordenadas de los vértices son

$$(-a,0) = (-7,0) \quad \text{y} \quad (a,0) = (7,0)$$

Las coordenadas de los focos son

$$(-c,0) = (-2\sqrt{6},0) \quad \text{y} \quad (c,0) = (2\sqrt{6},0)$$

La gráfica se muestra en la siguiente figura



Ejemplo 2: Obtener la ecuación de una elipse dados algunos elementos

Obtenga la ecuación de la elipse con centro en el origen, un foco en el punto $(0,3)$ y longitud del eje mayor igual a 10. Dibuje su gráfica.

Solución

Como la longitud del eje mayor es $2a$, se tiene que

$$2a = 10$$

$$a = 5$$

Como c es la distancia del centro a los focos, entonces c es la distancia del punto $(0,3)$ al origen $(0,0)$, a simple vistas se ve que ésta distancia es 3, entonces

$$c = 3$$

Ahora se puede calcular el valor de b con la ecuación

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = (5)^2 - (3)^2 = 16$$

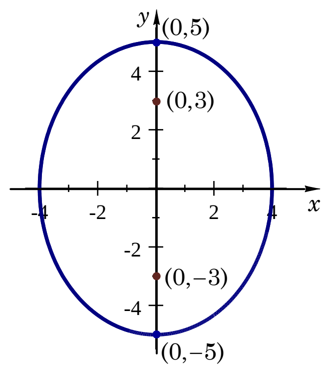
Entonces $b = \sqrt{16} = 4$

Como el foco se localiza en el eje y, la elipse es vertical y su ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$$

La gráfica se muestra en la siguiente figura



Elipses con vértice en el punto (h,k)

La ecuación de una elipse horizontal o vertical con centro en el punto (h,k) se puede obtener utilizando los conceptos de traslación horizontal y vertical discutidos en la unidad de funciones.

Si en la ecuación de la elipse horizontal con vértice en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se reemplaza x por $x - h$ y se reemplaza y por $y - k$ el centro de la elipse se traslada al punto $C(h,k)$. La ecuación trasladada de la elipse horizontal será

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Similarmente se puede obtener la ecuación trasladada para la elipse vertical. A continuación se presentan las ecuaciones de las elipses trasladadas, así como un resumen de sus elementos principales.

ECUACIÓN ESTÁNDAR DE LA ELIPSE HORIZONTAL CON CENTRO EN (h,k)

La ecuación estándar de la elipse horizontal con centro en el punto $C(h,k)$ es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

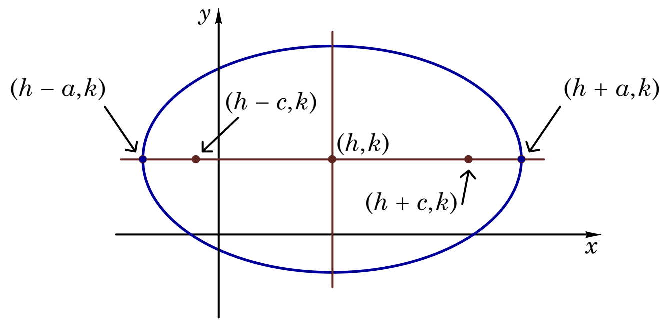
Donde: $c^2 = a^2 - b^2$

Longitud del eje mayor = $2a$ Longitud del eje menor = $2b$

Centro: $C(h,k)$ Vértices: $(h+a,k)$ y $(h-a,k)$

Focos: $(h+c,k)$ y $(h-c,k)$

La figura siguiente muestra la gráfica de una elipse horizontal con centro en el punto (h,k)



ECUACIÓN ESTÁNDAR DE LA ELIPSE VERTICAL CON CENTRO EN (h,k)

La ecuación estándar de la elipse vertical con centro en el punto $C(h,k)$ es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1\,,\quad a>b$$

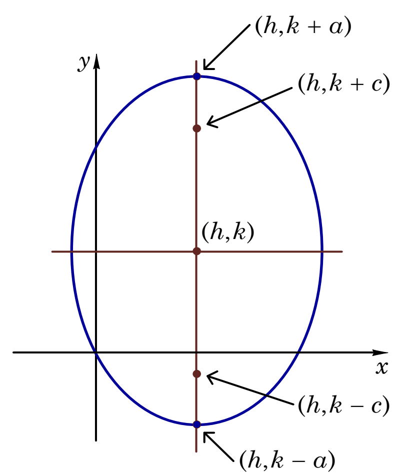
Donde: $c^2=a^2-b^2$

Longitud del eje mayor = $2a$ Longitud del eje menor = $2b$

Centro: $C(h,k)$ Vértices: $(h,k+a)$ y $(h,k-a)$

Focos: $(h,k+c)$ y $(h,k-c)$

La figura siguiente muestra la gráfica de una elipse vertical con centro en el punto (h,k)



Ecuación general de la elipse

La ecuación general de las cónicas trasladadas

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

Es una elipse horizontal si $0<A<B$ y es a una elipse vertical si $0<B<A$. Si al completar cuadrados en el lado derecho de la ecuación se obtiene cero, la ecuación corresponde a un punto. Si al completar cuadrados, en el lado derecho de la ecuación se obtiene un número negativo, la ecuación corresponde a un lugar geométrico vacío.

Ejemplo 3: Obtener el centro, vértices y focos de una elipse

Obtenga el centro, los vértices, los focos y dibuje la gráfica de la elipse cuya ecuación general es

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

Solución

Agrupando términos y completando cuadrados se tiene

$$(4x^2 - 8x) + (9y^2 + 36y) = -4$$

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) = -4$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = -4 + 4(1) + 9(4)$$

$$4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36$$

Dividiendo ambos lados entre 36 para obtener 1 en el lado derecho

$$\frac{4(x-1)^2}{36} + \frac{9(y+2)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

Que es la ecuación de una elipse horizontal, con centro $C(h,k) = (1,-2)$

$$a^2 = 9 \qquad\qquad b^2 = 4$$

$$a = \sqrt{9} = 3 \qquad\qquad b = \sqrt{4} = 2$$

Las coordenadas de los vértices son

$$V_1 = (h-a,k) = (1-3,-2) = (-2,-2)$$

$$V_2 = (h+a,k) = (1+3,-2) = (4,-2)$$

Para calcular las coordenadas de los focos primero se calcula el valor de c

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$= 9 - 4 = 5$$

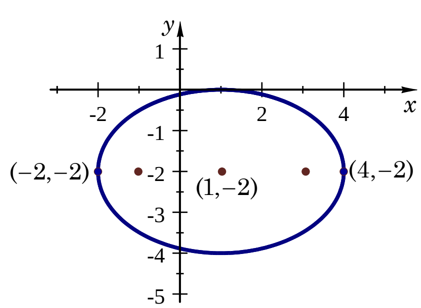
$$c = \sqrt{5}$$

Las coordenadas de los focos son

$$F_1 = (h-c,k) = (1-\sqrt{5},-2)$$

$$V_2 = (h+a,k) = (1+\sqrt{5},-2)$$

La gráfica de la elipse se muestra en la figura siguiente



Ejemplo 4: Obtener la ecuación de una elipse

Obtenga la ecuación de la ecuación general de la elipse con focos en los puntos $(4,1)$ y $(4,-5)$; eje menor de longitud 10. Dibuje la representación gráfica.

Solución

El centro se localiza en el punto medio del segmento que une los dos focos, es decir que el centro es

$$(h,k) = \left(\frac{4+4}{2}, \frac{1+(-5)}{2}\right) = (4,-2)$$

Los focos se encuentran en una recta paralela al eje y, por lo que la elipse es vertical, por otro lado, como la longitud del eje menor es 10, se tiene

$$2b = 10$$

$$b = 5$$

La distancia entre los focos es $2c$. Por simple observación la distancia entre los focos es igual a 6, por lo que $c = 3$.

Conociendo el valor de b y el valor de c se puede calcular el valor de a.

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$(3)^2 = a^2 - (5)^2$$

$$a^2 = 34$$

La ecuación estándar de una elipse vertical es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Al sustituir los datos se obtiene

$$\frac{(y+2)^2}{34} + \frac{(x-4)^2}{25} = 1$$

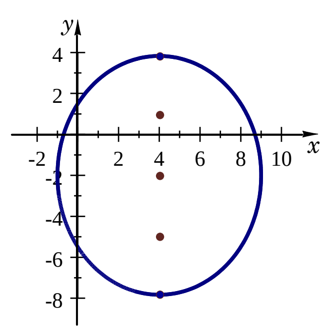
Para obtener la ecuación general se multiplica ambos lados por el mínimo común múltiplo y se desarrollan los cuadrados

$$25(y+2)^2 + 34(x-4)^2 = (25)(34)$$

$$25(y^2 + 4y + 4) + 34(x^2 - 8x + 16) = 850$$

$$25y^2 + 100y + 100 + 34x^2 - 272x + 544 - 850 = 0$$

$$25y^2 + 34x^2 + 100y - 272x - 206 = 0$$



Excentricidad de la elipse

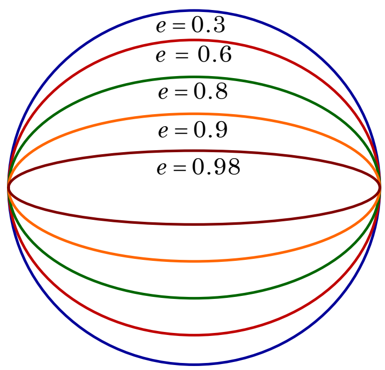
La gráfica de una elipse puede ser muy larga y angosta, o puede ser muy parecida a una circunferencia. Para medir que tan redonda es una elipse se utiliza la **excentricidad.**

Excentricidad de una elipse

La excentricidad de una elipse se define como la razón de c a a, donde c es la distancia del centro al foco y a es la distancia del centro a los vértices, es decir

$$e = \frac{c}{a}, \qquad 0 < e < 1$$

Como en una elipse $c < a$, se tiene que la excentricidad es siempre mayor que cero y menor que 1. Cuando $e \approx 0$, el valor de c es pequeño comparado con el valor de a, los focos están muy cerca del centro y la elipse se parece a una circunferencia. Cuando $e \approx 1$ el valor de c es aproximadamente igual al valor de a, los focos están muy cerca de los vértices y la elipse tiene forma muy alargada. La siguiente figura muestra algunas elipses y su excentricidad.



Ejemplo 5: Obtener la ecuación de una elipse

Obtenga la ecuación de la ecuación de la elipse horizontal que tiene su centro en el punto $(-3,1)$, tiene excentricidad $e = \frac{3}{4}$ y pasa por el punto $\left(0, \frac{11}{4}\right)$

Solución

Como es una elipse horizontal con centro en el punto $C(h,k) = (-3,1)$, la ecuación tiene la forma

$$\frac{(x+3)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

Le excentricidad es $e = \frac{3}{4}$, entonces

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

$$c = \frac{3a}{4}$$

Además se tiene que

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\left(\frac{3a}{4}\right)^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{9a^2}{16} = a^2 - b^2$$

$$b^2 = a^2 - \frac{9a^2}{16} = \frac{7a^2}{16}$$

Como la elipse pasa por el punto $\left(0, \frac{11}{4}\right)$, se puede sustituir $x = 0$ y $y = \frac{11}{4}$ en la ecuación, obteniendo

$$\frac{(0+3)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{11}{4} - 1\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} + \frac{\frac{49}{16}}{b^2} = \frac{9}{a^2} + \frac{49}{16b^2} = 1$$

Sustituyendo $b^2 = \frac{7a^2}{16}$ en la ecuación anterior y despejando a

$$\frac{9}{a^2} + \frac{49}{16\left(\frac{7a^2}{16}\right)} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} + \frac{49}{7a^2} = 1$$

$$\frac{63 + 49}{7a^2} = 1$$

$$112 = 7a^2$$

$$16 = a^2$$

$$a = 4$$

Ahora obtenemos el valor de b^2

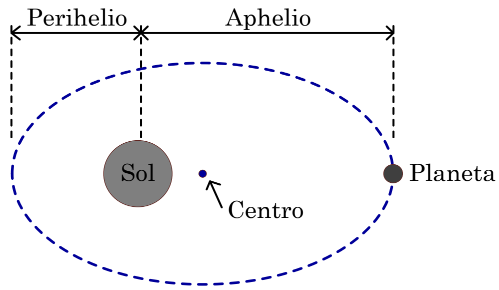
$$b^2 = \frac{7a^2}{16} = \frac{7(4)^2}{16} = 7$$

Entonces la ecuación estándar de la elipse es

$$\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$

Aplicaciones

Una de las aplicaciones más importantes de la elipse es en astronomía. El astrónomo Johannes Kepler formuló las tres leyes que rigen el movimiento de los planetas alrededor del sol. La primera ley de Kepler establece que los planetas giran en una órbita elíptica alrededor del sol, con el sol localizado en uno de los focos. La mayor parte de estas órbitas es casi circular, de manera que su excentricidad es muy pequeña, por ejemplo la excentricidad de la Tierra es $e = 0.017$, mientras que la de Marte es $e = 0.093$. En astronomía se utiliza el término **Perihelio** para referirse a la distancia más corta que hay desde el centro del sol a uno planeta y se utiliza el término **Aphelio** para referirse a la distancia más larga que hay desde el centro del sol a un planeta. La siguiente figura ilustra la órbita de un planeta, para que se pueda visualizar mejor se ha alargado la elipse

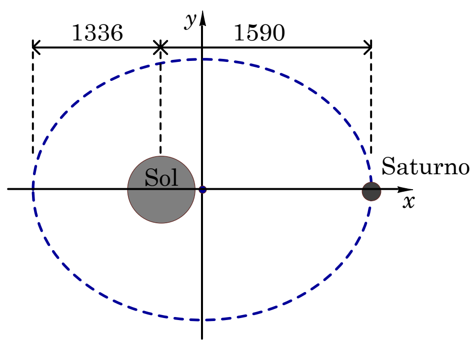


Ejemplo 6: Orbita de un planeta Saturno

La distancia del planeta Saturno al Sol en el aphelio es aproximadamente de 1590 millones de kilómetros y la distancia de Saturno al Sol en el perihelio es aproximadamente de 1336 millones de kilómetros. Obtenga una ecuación para la órbita del planeta Saturno.

Solución

La siguiente figura muestra la órbita de Saturno y las distancias más corta y más larga de Saturno al Sol en un sistema de coordenadas en el cual el centro de la elipse está en el origen.



Como la distancia más corta de un foco al vértice es $a - c$ y la distancia más larga del mismo foco al otro vértice es $a + c$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$a - c = 1336$$

$$a + c = 1590$$

Sumando las ecuaciones se obtiene

$$2a = 2926$$

$$a = 1463$$

Despejando c de la ecuación 2 y sustituyendo

$$c = 1590 - a = 1590 - 1463 = 127$$

Calculando el valor de b

$$b^2 = a^2 - c^2 = 1463^2 - 127^2 = 2124240$$

Por lo que la ecuación de la órbita del planeta Saturno es

$$\frac{x^2}{2140369} + \frac{y^2}{2124240} = 1$$

Ejercicios de la sección 7.2

En los ejercicios 1 a 20 encuentre el centro, los vértices, los focos y dibuje la gráfica de la elipse cuya ecuación está dada.

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

2. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$

3. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{9}=1$

4. $\frac{4y^2}{9}+\frac{x^2}{16}=1$

5. $\frac{x^2}{9}+\frac{9y^2}{25}=1$

6. $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

7. $\frac{(y+3)^2}{49}+\frac{x^2}{4}=1$

8. $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$

9. $\frac{(x+5)^2}{7}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

10. $\frac{9(x+5)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

11. $3x^2+4y^2=12$

12. $25x^2+16y^2=400$

13. $x^2+9y^2+6x-36y+36=0$

14. $16x^2+9y^2+36y-108=0$

15. $x^2+9y^2+6x-36y+36=0$

16. $9x^2+16y^2+36x-16y-104=0$

17. $16x^2+9y^2-64x-80=0$

18. $16x^2+9y^2-64x-54y+1=0$

19. $8x^2+25y^2-48x+50y+47=0$

20. $4x^2+9y^2+24x+18y+44=0$

En los ejercicios 21 al 40 encuentre la ecuación general de la elipse a partir de la información dada. Dibuje su gráfica.

21. Centro en $(0,0)$, eje mayor de longitud 10, un foco en el punto $(-4,0)$.

22. Centro en el origen, eje menor de longitud 6 y focos en los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$

23. Vértices en los puntos $(-6,0)$ y $(6,0)$, pasa por el punto $(0,4)$.

24. Eje mayor de longitud 12 sobre el eje y, centro en el origen y pasa por el punto $(-3,2)$

25. Centro en $(2,4)$, focos en $(-2,4)$ y $(6,4)$, eje menor de longitud 10.

26. focos en $(0,4)$ y $(0,-4)$, excentricidad $\frac{2}{3}$.

27. Centro en $(0,3)$, eje menor de longitud 4, focos en $(0,0)$ y $(0,6)$.

28. Centro en $(-2,4)$, un vértice en $(-6,4)$ y un foco en $(-5,4)$.

29. Centro en $(2,4)$, eje mayor de longitud 10 paralelo al eje y. Pasa por el punto $(3,3)$

30. Centro en $(-4,1)$, eje menor de longitud 8 paralelo al eje y. Pasa por el punto $(0,4)$.

31. Vértices en los puntos $(5,6)$ y $(5,-4)$, un foco en el punto $(5,-2)$.

32. Vértices en los puntos $(-7,-1)$ y $(5,-1)$, un foco en el punto $(-5,-1)$.

33. Excentricidad 2/5, eje mayor de longitud 10 en el eje x, centro en el origen.

34. Excentricidad 3/4, focos en los puntos $(9,0)$ y $(-9,0)$.

35. Excentricidad 2/5, eje menor de longitud 8 paralelo al eje x, centro en el origen.

36. Excentricidad 1/4, focos en los puntos $(-2,4)$ y $(-2,-2)$.

37. Excentricidad 3/5, eje menor de longitud 16 paralelo al eje y, centro en el punto $(3,-1)$.

38. Excentricidad 2/3, centro en el origen, pasa por el punto $(1,4)$.

39. Centro en el origen, pasa por los puntos $(2,8)$ y $(4,4)$.

40. Centro en el origen, pasa por los puntos $(2,3)$ y $(6,1)$.

41. La órbita del planeta Saturno alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de sus focos. La distancia más pequeña a la que pasa Saturno del Sol se llama Perihelio es aproximadamente de 835.14 millones de millas y la distancia más grande a la que pasa del Sol se llama Aphelio y es aproximadamente de 934.34 millones de millas. Obtenga una ecuación para la órbita de Saturno.

42. La puerta de entrada a un teatro tendrá forma de semieliplse, de 20 metros de ancho en su base y 6 metros de altura en el centro. Obtenga una ecuación para la elipse. ¿Qué altura tiene la puerta a una distancia de 4 metros del centro?

43. El techo de una galería de 12 metros de ancho tiene la forma de una semielipse con 8 metros de altura en el centro y paredes laterales de 4 metros de alto. Determine la altura que tiene el techo a una distancia de dos metros de cualquiera de las paredes.

44. La órbita de un planeta tiene la forma de una elipse con un eje mayor cuya longitud es de 600 millones de kilómetros. Si la distancia entre los focos es de 500 millones de kilómetros, obtenga la ecuación de la órbita.

45. Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de la tierra, de tal modo que el centro de la tierra está en uno de los focos. El punto más alejado del satélite a la superficie terrestre está a 3,500 millas y el más cercano está a 1,500 millas. Obtenga una ecuación para la órbita del satélite.

Tarea de la sección 7.2

En los ejercicios 1 a 4 encuentre los vértices, focos, excentricidad, y dibuje la gráfica de la elipse

9.
10.

Tarea de la sección 7.3

En los ejercicios 1 a 4 encuentre los vértices, focos, excentricidad, asíntotas y dibuje la gráfica de la hipérbola

1. $64y^2 - 36x^2 = 4$

2. $4x^2 - 25y^2 + 16x + 50y - 109 = 0$

3. $16y^2 - 9x^2 - 32x - 54y + 79 = 0$

4. $2x^2 - 9y^2 + 12x - 18y + 18 = 0$

5. Encuentre la ecuación general de la hipérbola que tiene centro en el origen, vértices en $(-2,0)$ y $(2,0)$, focos en los puntos $(-4,0)$ y $(4,0)$ Dibuje su gráfica.

6. Encuentre la ecuación general de la hipérbola que tiene asíntotas $y = \frac{1}{2}x$ y $y = -\frac{1}{2}x$, centro en $(0,0)$, vértices en $(0,5)$ y $(0,-5)$. Dibuje su gráfica.

7. Encuentre la ecuación general de la hipérbola que tiene centro en $(-2,4)$, vértices en los puntos $(-2,8)$ y $(-2,0)$. Foco en el punto $(-2,-2)$. Dibuje su gráfica.

8. Encuentre la ecuación general de la hipérbola que tiene centro en $(3,3)$, pendiente de una asíntota $m = 2$, pasa por el punto $(6,1)$, eje transverso paralelo al eje x. Dibuje su gráfica.

9. Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene vértices en los puntos $(2,3)$ y $(-2,3)$, excentricidad $\frac{5}{2}$. Dibuje la gráfica.

10. Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene centro en el punto $(4,1)$, eje conjugado de longitud 4, excentricidad $\frac{4}{3}$. Dibuje la gráfica (hay dos soluciones)