7.1 Parábolas

OBJETIVOS

- Encontrar la ecuación estándar de una parábola dada su ecuación general.
- Encontrar la ecuación de una parábola dados algunos de sus elementos.
- Dibujar la gráfica de una parábola a partir de su ecuación estándar
- Resolver problemas en donde el modelo es la ecuación de una parábola.

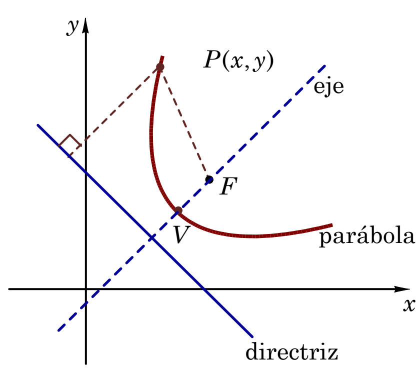
En la unidad de funciones se estudió que la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola vertical que abre hacia arriba o hacia abajo. En ésta sección se estudian las ecuaciones cuya gráfica es una parábola desde el punto de vista de la geometría analítica. En éste contexto una parábola es una de las secciones cónicas que se presentaron en la introducción de ésta unidad.

La siguiente es la definición geométrica de una parábola

Definición de parábola

Una parábola está formada por todos los puntos $P(x,y)$ del plano, que son equidistantes de un punto fijo F (llamado foco) y de una recta fija l (llamada directriz)

La siguiente figura muestra la gráfica de una parábola en el contexto de su definición

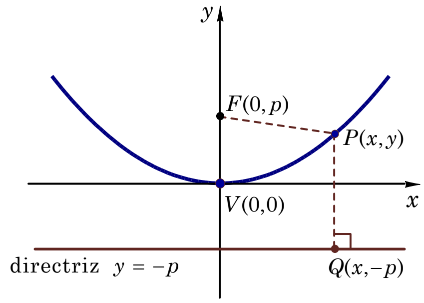


En esta sección se restringe el estudio a las parábolas verticales y horizontales es decir aquellas que tanto su eje como su directriz son paralelas a los ejes coordenados, estas son llamadas parábola horizontal y parábola vertical.

Parábolas con vértice en el origen (0,0)

Considere la siguiente figura donde se muestra la gráfica una parábola vertical que abre hacia arriba y cuyo vértice está en el origen, es decir que el vértice tiene coordenadas $V(0,0)$. Sea $p > 0$ la distancia que hay del vértice al foco y del vértice a la directriz, que son iguales por la definición de parábola.

Como el foco se localiza p unidades arriba del vértice, sus coordenadas son $F(0,p)$. Por otro lado la directriz es una recta horizontal cuya ecuación es $x = -p$ ya que se localiza p unidades abajo del eje x



Si $P(x,y)$ es un punto en la parábola, entonces la distancia de P al foco F debe ser igual a la distancia de P al punto Q, es decir

$$d|P,F| = d|P,Q|$$

Al utilizar la fórmula de distancia entre puntos se obtiene

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}$$

Elevando ambos lados al cuadrado y simplificando se obtiene

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (0)^2 + (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

Que es la ecuación de una parábola con eje vertical con vértice en el origen y que abre hacia arriba. Cuando $p < 0$ la parábola abre hacia abajo. En el cuadro siguiente cuadro se resumen los elementos de la parábola con vértice en el origen

PARÁBOLA CON EJE VERTICAL

Parábola con eje vertical y vértice en el origen

La ecuación estándar de una parábola con vértice en $V(0,0)$ y eje vertical es

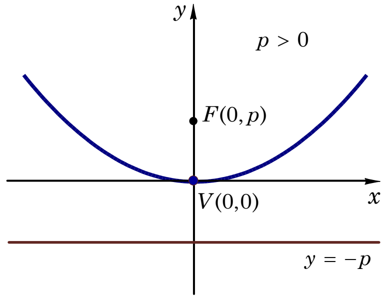
$$x^2 = 4py$$

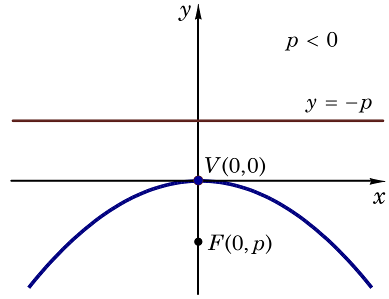
Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $p < 0$ la parábola abre hacia abajo.

Los elementos principales son los siguientes

Vértice:	$V(0,0)$	Directriz:	$y = -p$
Foco:	$F(0,p)$	Eje:	$x = 0$

En la siguiente figura se ilustran las parábolas con eje vertical





PARÁBOLA CON EJE HORIZONTAL

Parábola con eje horizontal y vértice en el origen

La ecuación estándar de una parábola con vértice en $V(0,0)$ y eje horizontal es

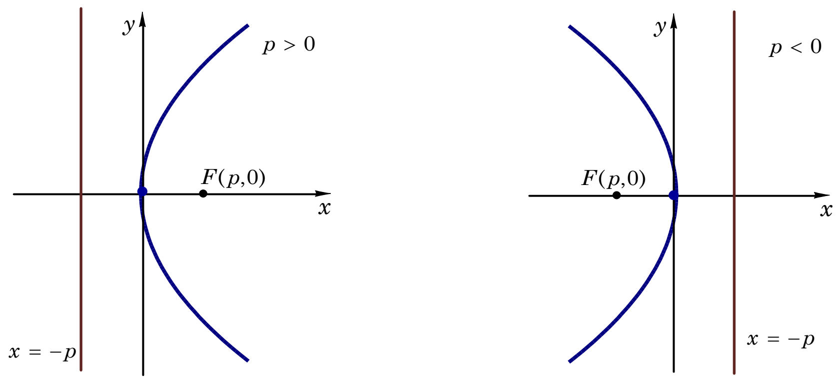
$$y^2 = 4px$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda.

Los elementos principales son los siguientes

Vértice:	$V(0,0)$	Directriz:	$x = -p$
Foco:	$F(p,0)$	Eje:	$y = 0$

En la siguiente figura se muestran las dos parábolas horizontales



Se llama **lado recto** de una parábola, al segmento de recta que pasa por el foco, es perpendicular al eje y tiene sus extremos en la parábola. La longitud del lado recto es llamado **ancho focal** o **diámetro focal** y nos da la medida de la abertura de la parábola en el foco.

$$\text{Ancho focal} = |4p|$$

Al trazar manualmente la gráfica de una parábola se recomienda que se encuentren las coordenadas del vértice y las coordenadas de los puntos extremos del lado recto. Luego trazar un arco parabólico que pase por los tres puntos.

Ejemplo 1: Obtener el foco y la directriz de una parábola

Obtenga el vértice, el foco, la directriz y dibuje la gráfica de la parábola cuya ecuación es

$$x^2 + 2y = 0$$

Solución

Al escribir la ecuación dada en forma estándar se obtiene

$$x^2 = -2y$$

Que corresponde a una parábola vertical que abre hacia abajo, con vértice en el origen, además

$$4p = -2$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

Las coordenadas del foco son

$$F(0,p) = \left(0,-\tfrac{1}{2}\right)$$

La ecuación de la directriz es

$$y = -p = -\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Para dibujar la gráfica se calcula el ancho focal

$$\text{Ancho focal} = |4p| = \left|4\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 2$$

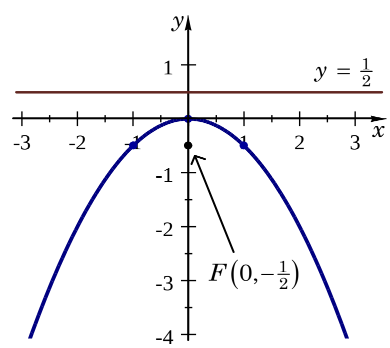
Por lo que los extremos del lado recto están separados 2 unidades, uno de ellos una unidad a la derecha del foco y el otro una unidad a la izquierda del foco. Las coordenadas de estos puntos son

$$\left(0+1,-\frac{1}{2}\right) = \left(1,-\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(0-1,-\frac{1}{2}\right) = \left(-1,-\frac{1}{2}\right)$$

Para dibujar la gráfica se traza una parábola que pase por los puntos

$$\left(1,-\frac{1}{2}\right), \quad (0,0) \quad y \quad \left(-1,-\frac{1}{2}\right)$$

La figura siguiente muestra la gráfica de la parábola



Ejemplo 2: Obtener la ecuación estándar de una parábola

Obtenga la ecuación de la parábola que tiene vértice en el origen y su directriz es la recta $x = 2$. Dibuje su gráfica.

Solución

La parábola buscada tiene eje horizontal y vértice en el origen, por lo que la ecuación que se busca es de la forma

$$y^2 = 4px$$

Como la ecuación de la directriz es la recta $x = 2$, se tiene que

$$2 = -p$$

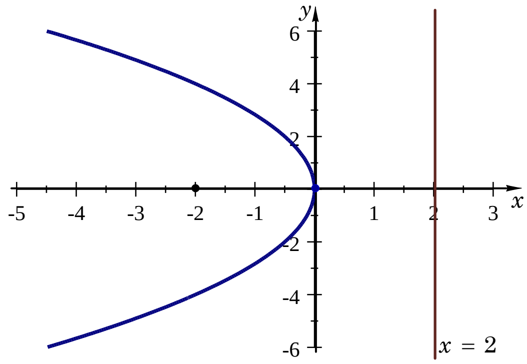
$$p = -2 < 0$$

Como p es negativo la parábola abre hacia la izquierda y su ecuación es

$$y^2 = 4(-2)x$$

$$y^2 = -8x$$

En la figura que sigue se muestra la gráfica de la parábola



Ejemplo 3: Obtener la ecuación estándar de una parábola dado un punto

Obtenga la ecuación de la parábola vertical que tiene vértice en el origen y que pasa por el punto (50.30)

Solución

Como la parábola es vertical su forma estándar es

$$x^2 = 4py$$

Como se sabe que el punto (50.30) pertenece la parábola se puede sustituir $x = 50$ y $y = 30$ en la ecuación y luego despejar p

$$(50)^2 = 4p(30)$$

$$p = \frac{2500}{120} = \frac{125}{6}$$

Entonces la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4\left(\frac{125}{6}\right)y$$

$$x^2 = \frac{250}{3}y$$

$$3x^2 - 250y = 0$$

Parábolas con vértice en el punto (h,k)

La ecuación de una parábola con eje vertical o eje horizontal y con vértice en el punto $V(h,k)$ se puede obtener utilizando los conceptos de traslación horizontal y vertical discutidos en la unidad de funciones.

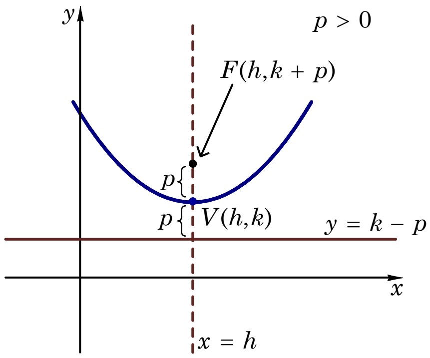
Si en la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen

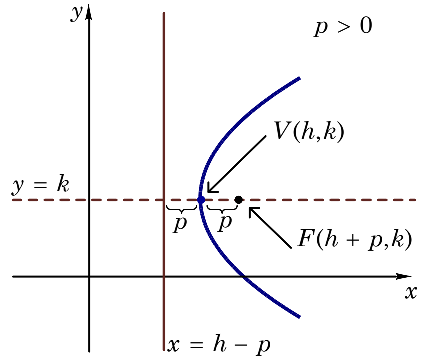
$$x^2 = 4py$$

Se reemplaza x por $x - h$ y se reemplaza y por $y - k$ el vértice de la parábola se traslada al punto $V(h,k)$. La ecuación trasladada de la parábola será

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Similarmente se puede obtener la ecuación trasladada para la parábola horizontal. En la figura siguiente se muestra una parábola horizontal con vértice en el punto $V(h,k)$





FORMA ESTÁNDAR DE LA ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN (h,k)

Parábola con eje vertical

La ecuación estándar de una parábola con vértice en $V(h,k)$ y eje vertical es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $p < 0$ la parábola abre hacia abajo.

Los elementos principales son los siguientes

Vértice:	$V(h,k)$	Directriz:	$y = k - p$
Foco:	$F(h,k+p)$	Eje:	$x = h$

Parábola con eje horizontal

La ecuación estándar de una parábola con vértice en $V(0,0)$ y eje horizontal es

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda.

Los elementos principales son los siguientes

Vértice:	$V(h,k)$	Directriz:	$x = h - p$
Foco:	$F(h+p,k)$	Eje:	$y = k$

Ecuación general de la parábola

Todas las secciones cónicas con ejes paralelos a los ejes de coordenadas se pueden representar por medio de la ecuación general

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La ecuación general corresponde a una parábola vertical si $B = 0$ y corresponde a una parábola horizontal si $A = 0$, A y B no pueden ser ambos cero, ya que la ecuación correspondería a una recta. Completando cuadrados en la ecuación general se obtiene la ecuación estándar.

Ejemplo 4: Obtener la ecuación estándar de una parábola

Obtenga la ecuación estándar, coordenadas del vértice, coordenadas del foco, ecuación de la directriz y dibuje la gráfica de la parábola cuya ecuación general es

$$3x + 2y^2 + 8y - 4 = 0$$

Solución

La ecuación corresponde a una parábola horizontal ya que $A = 0$ y $B = 2$. Completando cuadrados en la variable y para obtener la ecuación estándar

$$\begin{aligned} 3x + 2y^2 + 8y - 4 &= 0 \\ 2y^2 + 8y &= -3x + 4 \\ 2\left(y^2 + 4y + 4\right) &= -3x + 4 + (2)(4) \\ 2(y+2)^2 &= -3x + 12 \\ 2(y+2)^2 &= -3(x-4) \\ (y+2)^2 &= -\frac{3}{2}(x-4) \end{aligned}$$

La parábola tiene vértice en el punto $V(h,k) = (4,-2)$, abre hacia la izquierda ya que

$$\begin{aligned} 4p &= -\frac{3}{2} \\ p &= -\frac{3}{8} < 0 \end{aligned}$$

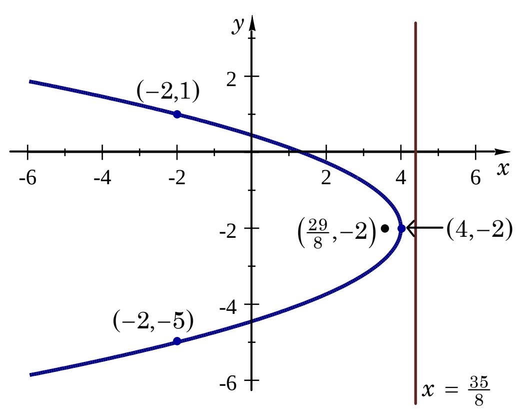
Las coordenadas del foco son

$$F(h+p,k) = \left(4 - \frac{3}{8}, -2\right) = \left(\frac{29}{8}, -2\right)$$

La ecuación de la directriz es

$$\begin{aligned} x &= h - p = 4 - \left(-\frac{3}{8}\right) \\ x &= \frac{35}{8} \end{aligned}$$

Para dibujar la gráfica se ha utilizado el foco y se han obtenido las coordenadas de dos puntos sustituyendo $x = -2$ en la ecuación. Los puntos son $(-2,-5)$ y $(-2,1)$.

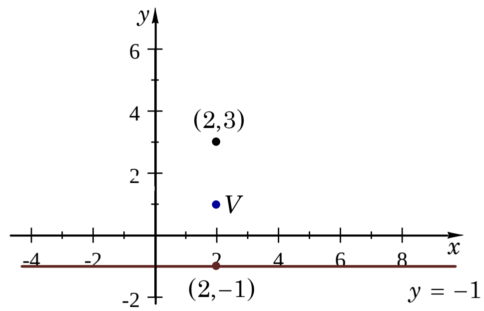


Ejemplo 5: Obtener la ecuación estándar de una parábola

Obtenga la ecuación general de la parábola que tiene directriz $y = -1$ y foco en el punto $(2,3)$. Dibuje su representación gráfica.

Solución

La siguiente figura muestra el foco y la directriz de la parábola



El vértice de la parábola se encuentra en el punto medio del segmento que une el punto $(2,3)$ con el punto $(2,-1)$ en la directriz, es decir

$$V(h,k) = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (2,1)$$

El valor de p se puede calcular por la fórmula de distancia entre el vértice y el foco, pero se puede ver claramente que $p = 2$. Su valor es positivo pues la parábola es vertical y abre hacia arriba.

La ecuación de la parábola es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$(x-2)^2 = 4(2)(y-1)$$

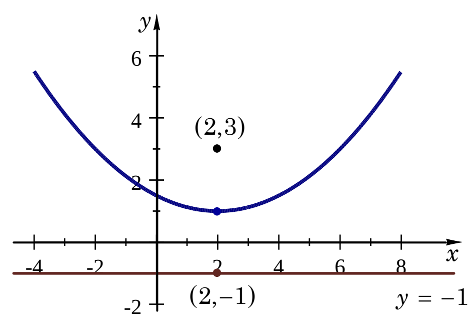
$$(x-2)^2 = 8(y-1)$$

Para obtener la ecuación general se desarrolla el binomio y se trasladan todos los términos al lado izquierdo

$$x^2 - 4x + 4 - 8y + 8 = 0$$

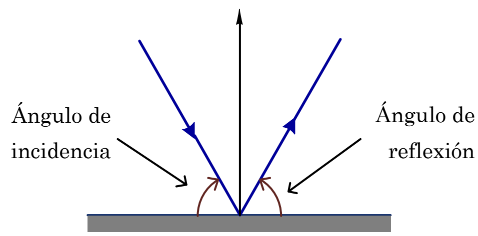
$$x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la parábola

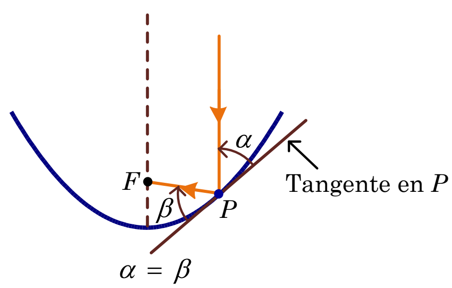


Aplicaciones

Un principio de la Física establece que cuando un rayo de luz es reflejado al tocar un punto P de una superficie, el ángulo de incidencia del rayo de luz es igual al ángulo de reflexión, como se muestra en la figura de la derecha.



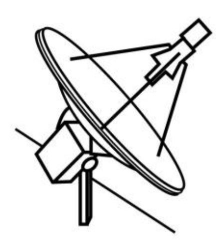
Al aplicar éste principio a una parábola, resulta cuando un rayo de luz que es paralelo al eje de la parábola, toca la parábola en un punto P, el ángulo de incidencia formado por el rayo de luz y la recta tangente a la parábola en P, es igual al ángulo de reflexión formado por el segmento que va del punto P al foco y la recta tangente en P. O dicho de forma más simple. Cuando un rayo de luz que es paralelo al eje de la parábola, toca la parábola en el punto P, el rayo es reflejado directamente hacia el foco. La figura siguiente ilustra ésta propiedad



El principio anterior tiene muchas aplicaciones en las ciencias, entre ellas el diseño de lentes para telescopios, el diseño de reflectores para iluminación, el diseño de antenas para recibir señales satelitales, etc.

Ejemplo 6: Localizar el foco de una antena satelital

Una antena para recibir señal de televisión satelital tiene forma parabólica. La señal es captada por un receptor localizado en el foco de la parábola. Si el diámetro en la parte ancha de la antena es de 4 pies y la profundidad en el centro es de 1/2 pie. Determine la distancia a la cual se localiza en receptor del centro de la antena.



Solución

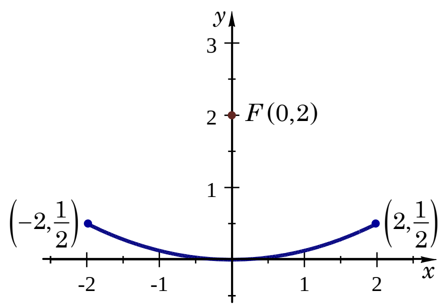
Usando la ecuación de una parábola vertical con vértice en el origen y que abre hacia arriba, la ecuación es

$$x^2 = 4py$$

Como la parábola pasa por el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, se puede sustituir $x = 2$ y $y = \frac{1}{2}$ para obtener el valor de p.

$$(2)^2 = 4p\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$4 = 2p$$
$$p = 2$$

Como el receptor está colocado en el foco, la distancia del centro del plato al receptor es de 2 pies, como se muestra en la figura siguiente



Ejercicios de la sección 7.1

En los ejercicios 1 a 15 encuentre el vértice, el foco, ecuación de la directriz y dibuje la gráfica de la parábola

1. $x^2 = -4y$

2. $y^2 = \frac{1}{3}x$

3. $4x^2 + y = 0$

4. $(y-1)^2 = 2x + 8$

5. $(2x-4)^2 = 8y - 16$

6. $x^2 + 8x - y + 6 = 0$

7. $y^2 + x - 3y + 4 = 0$

8. $2x - y^2 - 6y + 1 = 0$

9. $x^2 + 3x + 3y - 1 = 0$

10. $2x^2 - 8x - 4y + 3 = 0$

11. $2x + 4y^2 + 8y - 5 = 0$

12. $4x^2 - 12x + 12y + 7 = 0$

13. $3x^2 - 6x - 9y + 4 = 0$

14. $y^2 + 10x - 5 = 0$

15. $y^2 + 2y + 12x + 20 = 0$

En los ejercicios 16 a 33 encuentre la ecuación general de la parábola que satisface las condiciones dadas. Dibuje su gráfica.

16. Vértice $(0,0)$, foco $(0,-4)$

17. Vértice $(0,0)$, foco $(5,0)$

18. Vértice $(-1,2)$, foco $(-1,3)$

19. Vértice $(2,-3)$, foco $(0,-3)$

20. Vértice $(-5,3)$, directriz $y = 2$

21. Vértice $(2,4)$, directriz $y = 6$

22. Vértice $(-1,-1)$, directriz $x = \frac{1}{2}$

23. Vértice $(-2,5)$, directriz $x = -4$

24. Foco $(0,2)$, directriz $y = -2$

25. Foco $(3,-3)$, directriz $y = -5$

26. Foco $(-2,4)$, directriz $x = 4$

27. Foco $\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$, directriz $x = \frac{3}{2}$

28. Vértice en el origen, eje de simetría paralelo al eje x, pasa por el punto $(-3,2)$

29. Vértice en el origen, eje de simetría paralelo al eje y, pasa por el punto $(100,10)$

30. Vértice en el punto $(-4,1)$, eje paralelo al eje y, pasa por el punto $(-2,2)$.

31. Vértice en el punto $(3,-5)$, eje paralelo al eje x, pasa por el punto $(4,3)$.

32. Eje paralelo al eje x, pasa por los puntos $(-1,1)$, $(11,-2)$ y $(5,-1)$

33. Eje paralelo al eje y, pasa por los puntos $(1,2)$, $(2,6)$ y $(-1,12)$

34. El plato de una antena para recibir señal satelital tiene la forma de un paraboloide de 8 pies de diámetro en su parte más ancha y 1 pie de profundidad en el centro. ¿A qué distancia del centro del plato debe colocarse el receptor de señal?

35. El espejo parabólico del telescopio Hale en el Observatorio Palomar, tiene un diámetro de 200 pulgadas en la parte más ancha y una profundidad aproximada en el centro de 4 pulgada.

a. Determine la distancia del vértice al receptor de imágenes.

b. Encuentre una ecuación de la parábola que forma el espejo.

36. El espejo parabólico en el telescopio Lick en el observatorio del monte Hamilton tiene un diámetro de 120 pulgadas en su parte más ancha. Si el foco se localiza a 600 pulgadas del vértice de la parábola. Determine la profundidad del espejo en el centro.

37. Una puerta tiene la forma de arco parabólico con tres metros de altura en el centro y dos metros de ancho en la base. Por la puerta se quiere ingresar una refrigeradora de 1 metro de ancho y 2 metros de altura. Determine si la refrigeradora pasa por la puerta sin que haya necesidad de inclinarla.

38. Dos postes de concreto de 10 metros de altura están separados una distancia de 18 metros. Los postes sostienen en su parte superior un cable de energía eléctrica que cuelga en forma de parábola. Si la altura del cable en el centro es de 7 metros. Calcule la altura del cable a una distancia de 1 metro de uno de los postes.

39. La trayectoria de un proyectil disparado desde el suelo es una parábola que abre hacia abajo. Si la altura máxima del proyectil es de 120 metros y su alcance horizontal es de 1000 metros, encuentre una ecuación para la trayectoria del proyectil. ¡A que distancia horizontal el proyectil alcanza una altura de 80 metros?

40. El agua que sale por el extremo de una tubería horizontal que está a 2.5 metros sobre el suelo, describe una trayectoria parabólica, con el vértice de la parábola en el punto de salida del agua. Si el agua cae en el suelo a una distancia horizontal de 2 metros del punto de salida. Obtenga una ecuación para la trayectoria del chorro de agua.

41. Se va a construir un puente para pasar un barranco de 100 metros de ancho. Para hacerlo, se colocarán una torra de 40 metros del alto en cada extremo del barranco. De la parte más alta de las torres se colocará un cable que colgará en forma de parábola y su punto más bajo quedará a 10 metros sobre la carretera. Para sostener la carretera se utilizarán cables verticales con 10 metros de separación que estarán unidos en su parte superior al cable parabólico y en su parte inferior a la carretera horizontal. Calcule la longitud de los cables verticales.