

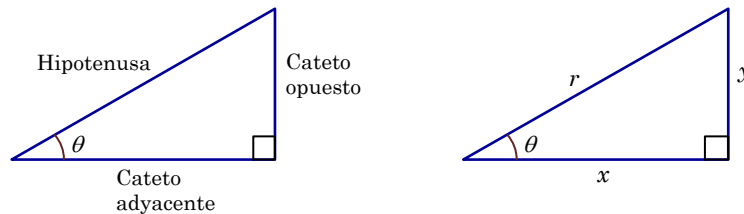
6.2 Funciones trigonométricas de ángulos agudos

OBJETIVOS

- Encontrar las funciones trigonométricas de ángulos agudos.
- Evaluar expresiones que contienen funciones trigonométricas de ángulos agudos.
- Encontrar los lados y ángulos en triángulos rectángulos usando funciones trigonométricas de ángulos agudos y una calculadora científica.
- Plantear y resolver problemas de aplicaciones de los triángulos rectángulos.

Hay varias formas de iniciar el estudio de las funciones trigonométricas. En los primeros estudios trigonométricos se utilizaron triángulos rectángulos para definir las funciones trigonométricas, en la actualidad se definen utilizando sistemas de coordenadas rectangulares o bien por medio del círculo unitario. En éste curso se definirán inicialmente como razones entre los lados en un triángulo rectángulo que fue como históricamente se construyeron.

Considere un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo, si le llama x al cateto adyacente, y al cateto opuesto y r a la hipotenusa, como se muestra en la figura, entonces las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ se definen como se indica a continuación



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Si θ es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo entonces, las funciones trigonométricas **seno**, **coseno**, **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** de θ se definen como

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{cot } \theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

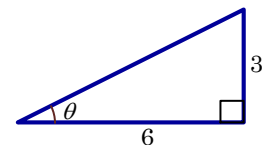
$$\text{sec } \theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{r}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\text{tan } \theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\text{csc } \theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{r}{y}, \quad y \neq 0$$

Ejemplo 1: Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Obtenga las seis funciones trigonométricas del ángulo θ , en el triángulo rectángulo que se muestra en la figura



Solución

Calculando la hipotenusa por el teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Ahora se puede calcular los valores de las 6 funciones trigonométricas pues se conocen los tres lados del triángulo

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{ad}}{\text{op}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ad}}{\text{hip}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

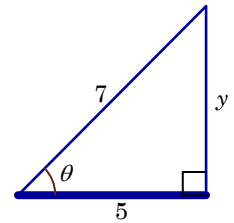
$$\sec \theta = \frac{\text{hip}}{\text{ad}} = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{op}}{\text{ad}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

Ejemplo 2: Calculando una función trigonométrica dado el valor de otra función trigonométrica

Si en un triángulo rectángulo $\cos \theta = \frac{5}{7}$, obtenga el valor exacto de $\operatorname{sen} \theta$ y $\tan \theta$



Solución

Si $\cos \theta = \frac{5}{7}$, se puede construir un triángulo rectángulo donde la hipotenusa tiene longitud $r = 7$ y el cateto adyacente tiene longitud $x = 5$, como se muestra en la figura

Utilizando el teorema de Pitágoras para calcular y

$$5^2 + y^2 = 7^2$$

$$y = \sqrt{49 - 25} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Ahora que se conocen los tres lados del triángulo se puede calcular cualquiera de las 6 funciones trigonométricas

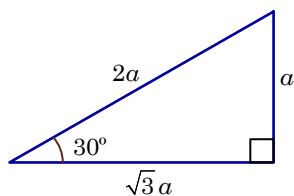
$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7}, \quad \tan \theta = \frac{y}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Funciones trigonométricas de ángulos especiales

Los ángulos especiales en Trigonometría son los mismos que en Geometría, estos ángulos son 30° , 45° y 60° . Se consideran especiales pues determinan un triángulo rectángulo cuyos lados se pueden calcular utilizando el teorema de Pitágoras, algo que no sucede con otros ángulos.

Funciones trigonométricas de 30°

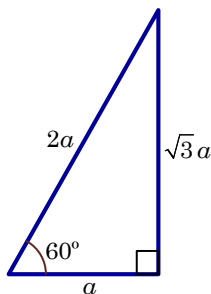
Las funciones trigonométricas de un ángulo de 30° se pueden obtener en un triángulo rectángulo que resulta de dividir un triángulo equilátero en dos triángulos iguales. En la figura se muestra un triángulo rectángulo con un ángulo de 30° , cuyo cateto opuesto tiene una longitud a , por lo que la longitud de la hipotenusa es $2a$ y el cateto adyacente se calcula por el teorema de Pitágoras.



Las funciones trigonométricas de 30° se pueden calcular de forma exacta ya que los lados del triángulo están todos determinados

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} & \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan 30^\circ &= \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \csc 30^\circ &= \frac{2a}{a} = \frac{2}{1} = 2 & \sec 30^\circ &= \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} & \cot 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Funciones trigonométricas de 60°

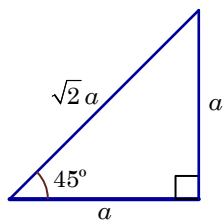


Las funciones trigonométricas de un ángulo de 60° se obtienen del triángulo anterior, ya que la medida del otro ángulo agudo es 30°

$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cot 60^\circ &= \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos 60^\circ &= \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} & \sec 60^\circ &= \frac{2a}{a} = \frac{2}{1} = 2 \\ \tan 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3} & \csc 60^\circ &= \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

Funciones trigonométricas de 45°

Para obtener los valores de las funciones trigonométricas del ángulo 45° , considere el triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales tienen longitud a . La hipotenusa r se calcula usando el teorema de Pitágoras, obteniéndose que $r = \sqrt{2}a$. Por lo que los valores de las funciones trigonométricas de 45° son



$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cot 45^\circ &= \frac{a}{a} = 1 \\ \cos 45^\circ &= \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sec 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2} \\ \tan 45^\circ &= \frac{a}{a} = 1 & \csc 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Evaluando una expresión trigonométrica

Calcule el valor exacto de la expresión $\cos^2 60^\circ - \sin^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$

Solución

Para evaluar la expresión dada utilizamos los valores exactos de las funciones trigonométricas de 30° , 45° y 60° , que han sido obtenidos anteriormente.

Por otro lado note que $\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$ y $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$.

$$\begin{aligned}\cos^2 60^\circ - \sin^2 45^\circ + \tan^2 30^\circ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Aplicaciones de los triángulos rectángulos

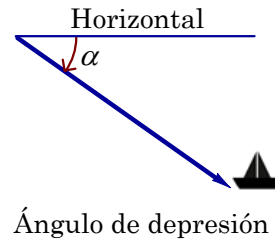
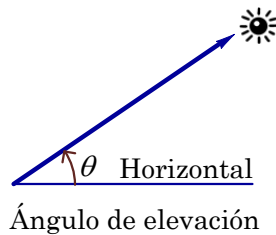
Una de las razones más importantes para estudiar trigonometría es la solución de problemas de aplicación. En ésta sección se estudiarán las aplicaciones que involucran triángulos rectángulos.

En éstas aplicaciones será necesario calcular valores de funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo, siendo necesario utilizar una calculadora que tenga funciones trigonométricas.

Al utilizar la calculadora para calcular funciones trigonométricas de ángulos en grados se debe verificar que se encuentre en el modo **degree**. Si el ángulo está en radianes hay que revisar que la calculadora esté en el modo **rad**.

Ángulo de elevación y ángulo de depresión

En algunas aplicaciones se hace referencia a un **ángulo de elevación**, el cual es un ángulo agudo que se mide desde una línea horizontal hacia arriba; mientras que un ángulo de depresión es un ángulo que se mide desde una línea horizontal hacia abajo. La siguiente figura muestra un ángulo de elevación θ y un ángulo de depresión α



Ángulos expresados en rumbos

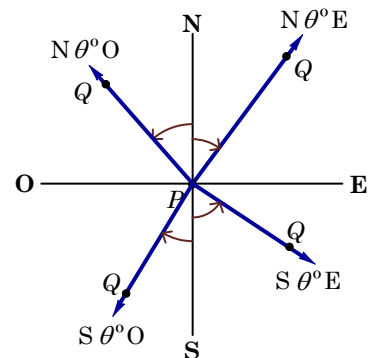
En algunos problemas de topografía y navegación cuando se observa un punto Q desde un punto P , es frecuente que esté la dirección del segmento PQ en **rumbos**. Un ángulo θ expresado en rumbos es la medida de un ángulo agudo que se mide desde el norte hacia el este o el oeste o bien desde el sur hacia el este o el oeste, de tal forma que hay cuatro mediciones posibles

$N \theta^\circ E$ Ángulo medido desde el Norte hacia el Este

$N \theta^\circ O$ Ángulo medido desde el Norte hacia el Oeste

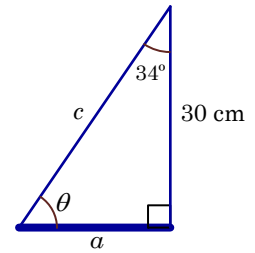
$S \theta^\circ E$ Ángulo medido desde el sur hacia el Este

$S \theta^\circ O$ Ángulo medido desde el sur hacia el Oeste



Ejemplo 4: Solución de un triángulo rectángulo

Encuentre los lados y ángulos desconocidos en el triángulo rectángulo que se muestra en la figura

**Solución**

Utilizando la función tangente para calcular a se tiene

$$\tan 34^\circ = \frac{a}{30}$$

$$30 \tan 34^\circ = a$$

Evaluyendo la expresión con una calculadora científica

$$a = 30(0.6745) = 20.235 \text{ cm}$$

Utilizando la función coseno para calcular c

$$\cos 34^\circ = \frac{30}{c}$$

$$c \cos 34^\circ = 30$$

$$c = \frac{30}{\cos 34^\circ}$$

Evaluyendo con una calculadora científica

$$c = \frac{30}{\cos 34^\circ} = \frac{30}{0.8290} = 36.186 \text{ cm}$$

Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios se tiene que

$$\theta = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$$

Ejemplo 5: Altura de un árbol

Cuando se observa la punta de un árbol desde un punto situado a 40 metros de su base, el ángulo de elevación es de 64.3° . Determine la altura del árbol

Solución

En la figura se muestra el árbol y el triángulo rectángulo que se forma. Si h es la altura del árbol, se tiene que

$$\tan 64.3^\circ = \frac{h}{40}$$

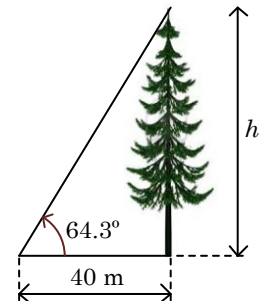
Despejando la altura h

$$h = 40 \tan 64.3^\circ$$

$$h = 40(2.078)$$

$$= 83.114$$

De donde la altura del árbol es de 83.114 metros.

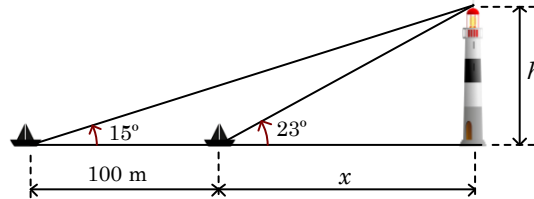


Ejemplo 6: Altura de un faro

Desde un barco que navega hacia un faro que se encuentra en un puerto, se observa que el ángulo de elevación a la parte más alta de un faro que se encuentra en la playa es de 15° . Cuando el barco se ha desplazado 100 metros el ángulo de elevación es de 23° . Calcula la altura del faro y la distancia a la cual se encuentra el barco del faro en el momento de la segunda observación.

Solución

En la figura se muestra el faro, así como los ángulos de elevación observados y la distancia recorrida por el barco. Se ha representado por h la altura y por x la distancia entre el barco y el faro



Observe que se forman dos triángulos rectángulos, uno de ellos tiene cateto adyacente x y cateto opuesto h , mientras que el otro tiene cateto adyacente $100 + x$ y cateto opuesto h . Al utilizar la función tangente para cada uno de los ángulos agudos se tiene

$$\tan 15^\circ = \frac{h}{100 + x}, \quad \tan 23^\circ = \frac{h}{x}$$

Despejando h en ambas ecuaciones e igualando se puede calcular el valor de x

$$(100 + x)\tan 15^\circ = x\tan 23^\circ$$

$$100\tan 15^\circ + x\tan 15^\circ = x\tan 23^\circ$$

$$x\tan 15^\circ - x\tan 23^\circ = -100\tan 15^\circ$$

$$x(\tan 15^\circ - \tan 23^\circ) = -100\tan 15^\circ$$

$$x = \frac{-100\tan 15^\circ}{\tan 15^\circ - \tan 23^\circ}$$

$$x = \frac{-26.7949}{-0.1565}$$

$$x = 171.186 \text{ m}$$

La altura del faro se puede calcular ahora fácilmente

$$\tan 23^\circ = \frac{h}{x}$$

$$h = x\tan 23^\circ = (171.186)\tan 23^\circ = 72.664 \text{ m}$$

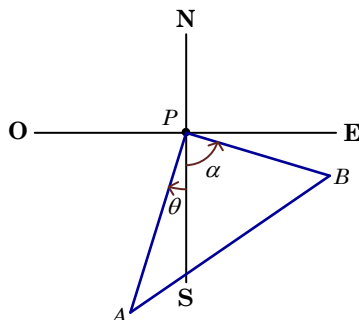
Ejemplo 7: Distancia entre dos barcos

Un barco sale de un muelle en dirección $S17^\circ15'O$ a una velocidad de 25 kilómetros por hora. Un segundo barco sale del mismo puerto una hora más tarde con dirección $S72^\circ45'E$ con una velocidad de 25 kilómetros por hora. Calcula la distancia que separa los barcos dos horas después de que salió el segundo barco.

Solución

La figura muestra el muelle en el punto P , y la posición del primer barco a las tres horas en el punto A y la posición del segundo barco en el mismo instante el punto B .

Si θ es la dirección en rumbos del primer barco y α es la dirección en rumbos del segundo barco, entonces



$$\angle APB = \theta + \alpha = 17^\circ 15' + 72^\circ 45' = 90^\circ$$

Por lo que el triángulo APB es un triángulo rectángulo.

La distancia recorrida por el primer barco es

$$PA = vt = (25)(3) = 75 \text{ km}$$

La distancia recorrida por el segundo barco es

$$PB = vt = (30)(2) = 60 \text{ km}$$

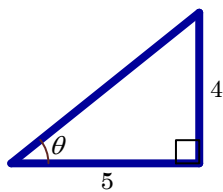
La distancia AB entre los barcos es

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(AP)^2 + (BP)^2} = \sqrt{75^2 + 60^2} \\ &= 96.047 \text{ km} \end{aligned}$$

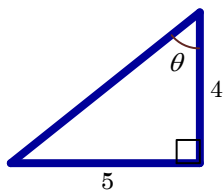
Ejercicios de la sección 6.2

En los ejercicios 1 a 4 encuentre las 6 funciones trigonométricas del ángulo θ , en el triángulo dado

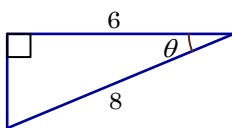
1.



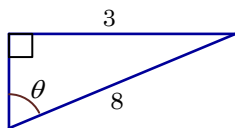
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 a 8 se da una de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. Dibuje el triángulo y encuentre los valores de las otras 5 funciones.

5. $\sin \theta = \frac{1}{5}$

6. $\tan \theta = \frac{4}{3}$

7. $\sec \theta = \frac{7}{8}$

8. $\cos \theta = \frac{2}{3}$

En los ejercicios 9 a 12 encuentre el valor exacto de la expresión trigonométrica dada

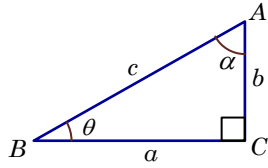
9. $2 \sin 30^\circ + \tan 30^\circ$

10. $\sec 45^\circ \tan 30^\circ - \cos^2 60^\circ$

11. $\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

12. $3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

En los ejercicios 13 al 16 se dan un lado y un ángulo de un triángulo rectángulo ABC . Encuentre los lados y el ángulo restante.



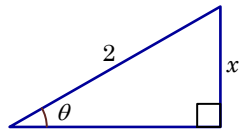
13. $\theta = 37^\circ$, $a = 20$

14. $\theta = 32^\circ$, $c = 25$

15. $\alpha = 65^\circ$, $a = 20$

16. $\alpha = 70^\circ$, $a = 20$

En los ejercicios 17 al 20 utilice el siguiente triángulo rectángulo para mostrar que las igualdades dadas son válidas



17. $\sin \theta \cos \theta = \frac{x^2}{2\sqrt{4-x^2}}$

18. $\tan^2 \theta = \frac{x^2}{4-x^2}$

19. $\sec^2 \theta = \frac{4}{4-x^2}$

20. $\frac{\cos^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{4}(4-x^2)^2$

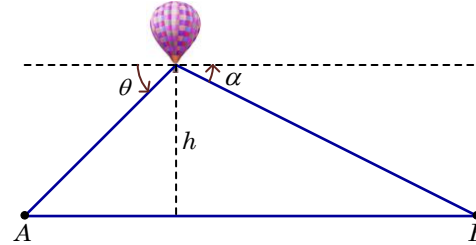
21. Desde un punto situado a 12 pies de la base de una pared vertical, el ángulo de elevación a la parte más alta es de 53° . Calcule la altura de la pared.

22. En cierto instante un barco está situado al este de un faro y a una distancia de 40 kilómetros. Si el barco navega en dirección $S 72^\circ O$. Calcule la distancia más corta a la que pasará el barco del faro

23. A las 3:00 P.M. una lancha se encuentra a 15 millas al oeste de un faro. Si la lancha viaja a una velocidad de 12 millas por hora en dirección $N 33^\circ 18' E$. Calcule que hora la lancha pasará lo más cerca del faro.

24. Un niño vuela un barrilete que se encuentre a una altura sobre el suelo de 24 metros. Si las manos del niño se encuentran a 1 metro sobre el nivel del suelo y la cuerda tiene un ángulo de elevación de 37° . Calcule la longitud de la cuerda

25. Un globo aerostático se encuentra a una altura de 100 metros sobre el suelo cuando se observan los puntos A y B con ángulos de depresión $\theta = 45^\circ$ y $\alpha = 27^\circ$. Encuentre la distancia entre los puntos A y B .



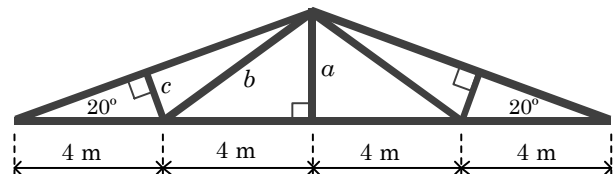
26. Un cable que sostiene un poste telefónico va del suelo a la parte más alta del poste. El ángulo de elevación del cable es de 55° . Si la altura del poste es de 12 metros. Calcule la longitud del cable.

27. Los puntos A y B están en los lados opuestos de un río recto. Para calcular el ancho del río se establece un punto C , a 100 metros del punto A del mismo lado del río que el punto A , de modo que el segmento AB es perpendicular al segmento AC . Si el ángulo $\angle ACB$ mide 62° . Calcule el ancho del río.

28. Un topógrafo desea calcular el diámetro AB de un lago circular. Para hacerlo localiza un punto C en la orilla del lago y a una distancia de 50 metros del punto A . Si la medida del ángulo $\angle BAC$ es de 84° . Calcule el diámetro del lago.

29. Desde un helicóptero que vuela a una altura de 800 metros, el piloto observa dos barcos que están en dirección este. Los ángulos de depresión a los barcos desde el helicóptero son de 56° y 29° respectivamente. Calcule la distancia entre los dos barcos.

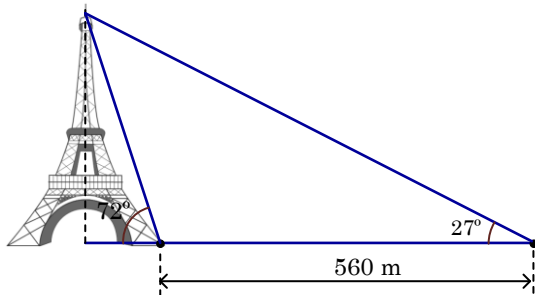
30. La estructura metálica para sostener el techo de una bodega debe tener la forma mostrada en la figura. Calcule las longitudes a , b y c de los elementos estructurales que se indican.



31. Un puesto de control B de incendios en un bosque se localiza 30 km al este de otro puesto de control A . Un guardabosques en el puesto A observa un incendio en dirección

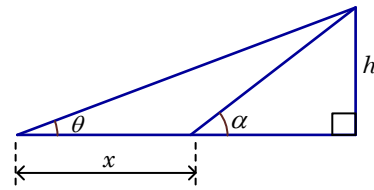
N76°E, mientras que el guardabosques en el puesto B observa el mismo incendio en dirección N14°O. Calcule las distancias de cada punto de observación al incendio.

32. Desde un punto P , situado en el suelo a 50 metros de una iglesia, el ángulo de elevación a la base de una antena situada sobre la iglesia es 28° , mientras que el ángulo de elevación a la parte superior de la antena es de 46° . Calcule la altura de la antena y la altura de la iglesia.
33. Un avión pasa sobre una torre de control a una altura de 5000 metros y está volando en dirección norte. En cierto instante el ángulo de elevación de nave es de 42° y 20 segundos después es de 30° . Calcule la velocidad del avión.
34. Un aeropuerto tiene una colina de 40 metros de altura al final de la pista. Un avión inicia el ascenso a una distancia de 150 metros de la colina con un ángulo de elevación constante. Determine el ángulo de elevación del avión si el piloto debe pasar a una altura de 30 metros sobre la cima de la colina.
35. Para determinar la altura de la torre Eiffel se mide el ángulo de elevación 72° desde una de sus bases a la parte más alta. Desde un punto a 560 metros de la base se mide el ángulo de elevación de 27° , como se indica en la figura. Calcule la altura de la torre Eiffel.



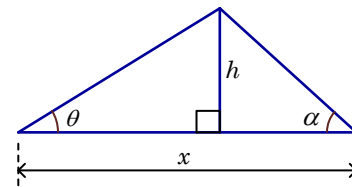
36. En la figura que se muestra a continuación, demuestre que

$$h = \frac{x \tan \theta \tan \alpha}{\tan \alpha - \tan \theta}$$



37. En la figura que se muestra a continuación, demuestre que

$$h = \frac{x}{\cot \theta - \cot \alpha}$$



38. Un canal tiene la forma de un trapecio isósceles base de 60 cm y lados iguales de 40 cm, como se muestra en la figura. Expresar el área del canal en términos del ángulo θ .

