

PROBLEMA RESUELTO 3

Resuelva la ecuación con radicales

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 2$$

Solución

Al observar con cuidado la ecuación, es lógico suponer que se puede hacer alguna sustitución que la simplifique un poco. No es nada fácil encontrar la sustitución apropiada en estas situaciones.

Luego de algunos intentos fallidos, se encuentra que una sustitución que permite resolver la ecuación es

$$u = \sqrt{x-2}.$$

Al hacer este cambio de variable se tiene que

$$u = \sqrt{x-2}$$

$$u^2 = x-2$$

$$u^2 + 2 = x$$

Efectuando las sustituciones en la ecuación original se obtiene

$$\begin{aligned}\sqrt{(u^2+2)-1+2u} + \sqrt{(u^2+2)-1-2u} &= 2 \\ \sqrt{u^2+2u+1} + \sqrt{u^2-2u+1} &= 2\end{aligned}$$

Las expresiones dentro de los radicales son trinomios cuadrados perfectos y se pueden factorizar, lo que permite eliminar los radicales

$$\begin{aligned}\sqrt{(u+1)^2} + \sqrt{(u-1)^2} &= 2 \\ (u+1) + (u-1) &= 2 \\ 2u &= 2 \\ u &= 1\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $u = 1$ para encontrar el valor de x

$$\begin{aligned}1 &= \sqrt{x-2} \\ 1^2 &= (\sqrt{x-2})^2 \\ 1 &= x-2 \\ x &= 3\end{aligned}$$

Respuesta:

Al efectuar la prueba en la ecuación dada, se concluye que la solución de la ecuación es

$$x = 3$$
