PROBLEMA RESUELTO

(Miguel Ángel Castillo)

Demuestre la identidad trigonométrica

$$\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta+1}$$

Solución

El procedimiento clásico para demostrar una identidad trigonométrica consiste en elegir uno de los lados, desarrollar operaciones algebraicas y sustituciones trigonométricas hasta obtener una expresión igual a la del otro lado. En éste ejemplo se recomienda trabajar sobre el lado derecho ya que las funciones $\tan\theta$ y $\sec\theta$ se pueden expresar en términos de senos y cosenos y luego efectuar las operaciones algebraicas resultantes.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta} &= \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta+1} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}+1} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1+\cos\theta}{\cos\theta}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}{\cos^2\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta(1+\cos\theta)}
\end{aligned}$$

En este punto parece ser que ya no hay operaciones algebraicas por efectuar y se debe pensar en una sustitución trigonométrica, como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se tiene que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Al hacer la sustitución en el numerador y factorizar la diferencia de cuadrados se completa la demostración

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta} &= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}
\end{aligned}$$