1.7 Otros tipos de desigualdades

OBJETIVOS

- Resolver desigualdades de grado mayor que 1.
- Resolver desigualdades racionales.
- Plantear y resolver problemas en donde el modelo es una desigualdad cuadrática o una desigualdad racional.

Desigualdades de grado mayor que 1

Para resolver una desigualdad que involucra a un polinomio de grado mayor o igual a 2, es necesario expresarlo como un producto de factores lineales o factores cuadráticos irreducibles. Un factor cuadrático $ax^2 + bx + c$, es irreducible si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones complejas.

Una vez que el polinomio se ha factorizado se encuentran todos los ceros reales del mismo y se utiliza la siguiente propiedad

PROPIEDAD DEL SIGNO DE UN POLINOMIO

Si x no es un cero de un polinomio, entonces el polinomio es mayor que cero ó el polinomio es menor que cero para todos los valores de x entre dos ceros consecutivos.

Cuando se resuelven desigualdades que involucran polinomios, es usual llamar **valores críticos** a los ceros del polinomio. Según la propiedad anterior entre dos valores críticos consecutivos el polinomio solo puede ser positivo, o bien solo puede ser negativo. Por lo tanto será suficiente tomar un **valor de prueba** entre dos valores críticos consecutivos y evaluar el polinomio en ese número para establecer si el polinomio es mayor que cero o menor que cero en el intervalo determinado por los valores críticos consecutivos.

Ejemplo 1: Resolviendo una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad

$$x(3x-1) \le 4$$

Solución

Trasladando todos los términos al lado izquierdo y desarrollando el producto se tiene

$$x(3x-1) \le 4$$

$$3x^2 - x - 4 \le 0$$

Factorizando el polinomio cuadrático

$$3x^2 - x - 4 \le 0$$

$$\frac{(3x-4)(3x+3)}{3} \le 0$$

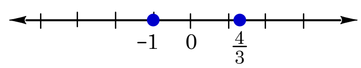
$$(3x-4)(x+1) \le 0$$

Una vez factorizado el polinomio, se encuentran los valores que hacen cero cada uno de los factores, a los cuales se les llama valores críticos

Si $3x - 4 = 0$, se obtiene $x = \frac{4}{3}$

Si $x + 1 = 0$, se obtiene $x = -1$

Los valores críticos $x = -1$ y $x = \frac{4}{3}$ dividen a la recta numérica en 3 intervalos como se ilustra en la figura siguiente



Estos intervalos son: $(-\infty,-1]$, $[-1,\frac{4}{3}]$, $[\frac{4}{3},\infty)$

Observe que los intervalos son cerrados en -1 y $\frac{4}{3}$ pues la desigualdad es menor o igual que cero y como al evaluar la expresión en los extremos de los intervalos obtiene una proposición verdadera, éstos deben estar incluidos en la solución.

De acuerdo con la propiedad del signo, en cada intervalo el polinomio es mayor que cero o menor que cero.

Para saber cuáles de los intervalos son soluciones de la desigualdad se debe tomar un valor de prueba en cada intervalo, si se obtiene un resultado positivo el intervalo no es solución de la desigualdad, si se obtiene un resultado negativo, el intervalo si es solución, ya que la desigualdad es

$$(3x-4)(x+1) \le 0$$

Se recomienda construir una tabla como la siguiente para efectuar las pruebas.

Intervalo	Valor de prueba	Prueba $(3x-4)(x+1)$	Resultado	Conclusión
$(-\infty,-1]$	-2	$(-)(-)$	$+$	No es solución
$\left[-1,\frac{4}{3}\right]$	0	$(-)(+)$	$-$	Si es solución
$\left[\frac{4}{3},\infty\right)$	2	$(+)(+)$	$+$	No es solución

Observe que en la tabla solo se colocan los signos resultantes de cada factor, al evaluar el valor de prueba en la expresión, ya que lo que interesa es saber si es positiva o negativa. Por ejemplo al sustituir el valor de prueba -2 en la expresión se obtiene

$$(3(-2)-4)(-2+1) = (-10)(-1) = (-)(-)$$

Como únicamente en el intervalo $\left[-1,\frac{4}{3}\right]$ se obtiene un resultado negativo, se concluye que la solución de la desigualdad es el conjunto de todos los números reales que están en el intervalo $\left[-1,\frac{4}{3}\right]$.

Desigualdades racionales

Las desigualdades racionales se resuelven de forma similar a las desigualdades polinomiales, con la diferencia que también se consideran como valores críticos los números que hacen cero el denominador de la expresión racional.

Extendiendo concepto de valores críticos para una expresión racional se tiene

Valores críticos de una expresión racional

Los **valores críticos de una expresión racional** son los números reales que hacen que el numerador de la expresión racional sea igual a cero o que el denominador de la expresión racional sea igual a cero.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para resolverlas

Ejemplo 2: Resolviendo una desigualdad racional

Resuelva la desigualdad

$$\frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{2x-1}$$

Solución

Un error frecuente de los estudiantes es pasar a multiplicar los denominadores. Esto, como ya se explicó antes, no se puede hacer en las desigualdades ya que no se sabe si las expresiones son positivas o negativas para todo x. Lo que se debe hacer es trasladar todas las fracciones al lado izquierdo de la desigualdad y simplificar la suma de fracciones resultante

$$\frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{2x-1}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2x-1} \geq 0$$

$$\frac{1(2x-1)-1(x+2)}{(x+2)(2x-1)} \geq 0$$

$$\frac{2x-1-x-2}{(x+2)(2x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x-3}{(x+2)(2x-1)} \geq 0$$

Ahora se iguala a cero cada uno de los factores, para determinar los valores críticos de la expresión racional

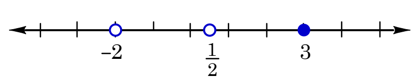
Si $x-3=0$ se obtiene $x=3$

Si $x+2=0$ se obtiene $x=-2$

Si $2x-1=0$ se obtiene $x=\frac{1}{2}$

Observe que $x=-2$ y $x=\frac{1}{2}$ no pueden ser soluciones de la desigualdad ya que hacen cero el denominador y la división entre cero no está definida, mientras que $x=3$ si es solución ya que cuando el numerador es cero la expresión es igual a cero.

Localizando los valores críticos en una recta numérica se tiene



De donde se obtiene que los intervalos donde se deben realizar las pruebas son:

$$(-\infty,-2),\quad \left(-2,\tfrac{1}{2}\right),\quad \left(\tfrac{1}{2},3\right],\quad [3,\infty)$$

La tabla siguiente muestra los valores de prueba seleccionados así como los resultados obtenidos

Intervalo	Valor de prueba	Prueba $\frac{x-3}{(x+2)(2x-1)}$	Resultado	Conclusión
$(-\infty,-2)$	-2	$\frac{(-)}{(-)(-)}$	$-$	No es solución
$\left(-2,\frac{1}{2}\right)$	0	$\frac{(-)}{(+)(-)}$	$+$	Si es solución
$\left(\frac{1}{2},3\right]$	2	$\frac{(-)}{(+)(+)}$	$-$	No es solución
$[3,\infty)$	4	$\frac{(+)}{(+)(+)}$	$+$	Si es solución

De los resultados en la tabla se concluye que la solución de la desigualdad es

$$\left(-2,\tfrac{1}{2}\right) \cup [3,\infty)$$

Ejemplo 3: Una aplicación con desigualdades cuadráticas

Un productor de raquetas de Tenis, tiene ingresos anuales por la venta de cierto tipo de raquetas dados por $I = 1280x - 8x^2$, donde I es el ingreso en quetzales y x es el precio de venta de una raqueta en quetzales. ¿Cuántas raquetas debe vender anualmente si quiere tener ingresos mayores de Q48,000?

Solución

Para encontrar la solución de este problema es necesario resolver la desigualdad

$$1280x - 8x^2 > 48000$$

Trasladando los términos al lado izquierdo y dividiendo entre −8 se obtiene

$$1280x - 8x^2 > 48000$$

$$\frac{1280x - 8x^2 - 48000}{-8} < 0$$

$$x^2 - 160x + 600 < 0$$

Factorizando el trinomio y obteniendo los valores críticos se tiene

$$(x-60)(x-100) < 0$$

Si $x - 60 = 0$ se obtiene $x = 60$

Si $x - 100 = 0$ se obtiene $x = 100$

A partir de éstos números obtenemos los intervalos

$$(-\infty,60),\quad (60,100),\quad (100,\infty)$$

Los resultados de las pruebas de muestran en la tabla siguiente

Intervalo	Valor de prueba	Prueba $(x-60)(x-100)$	Resultado	Conclusión
$(-\infty,60)$	0	$(-)(-)$	$+$	No es solución
$(60,100)$	70	$(-)(+)$	$-$	Si es solución
$(100,\infty)$	110	$(+)(+)$	$+$	No es solución

De donde se concluye que el fabricante debe vender entre 60 y 100 raquetas para tener ingresos mayores de Q48,000.

Ejemplo 4: Desigualdad cuadrática con valor absoluto

Resuelva la desigualdad

$$|x^2 - 5| \geq 4$$

Solución

Aplicando la propiedad de las desigualdades, se obtiene que la desigualdad dada es equivalente a las dos desigualdades

$$x^2 - 5 \geq 4 \qquad \text{o} \qquad x^2 - 5 \leq -4$$

La solución final será la unión de las soluciones de las dos desigualdades.

Resolviendo la primera desigualdad

$$x^2 - 5 \geq 4$$

$$x^2 - 9 \geq 0$$

$$(x-3)(x+3) \geq 0$$

Los valores críticos son $x = -3$ y $x = 3$, que dividen a la recta numérica en los intervalos

$$(-\infty,-3], \quad [-3,3], \quad [3,\infty)$$

La tabla siguiente muestra el análisis de signos en cada uno de los intervalos

Intervalo	Valor de prueba	Prueba $(x-3)(x+3)$	Resultado	Conclusión
$(-\infty,-3]$	-4	$(-)(-)$	$+$	Si es solución
$[-3,3]$	0	$(-)(+)$	$-$	Ni es solución
$[3,\infty)$	4	$(+)(+)$	$+$	Si es solución

De donde la solución de la primera desigualdad es $(-\infty,-3], \quad [3,\infty)$

Resolviendo la segunda desigualdad

$$x^2 - 5 \leq -4$$

$$(x-1)(x+1) \leq 0$$

Los valores críticos son $x = -1$ y $x = 1$, que dividen a la recta numérica en los intervalos

$$(-\infty,-1], \quad [-1,1], \quad [1,\infty)$$

La tabla siguiente muestra el análisis de signos en cada uno de los intervalos

Intervalo	Valor de prueba	Prueba $(x-1)(x+1)$	Resultado	Conclusión
$(-\infty,-1]$	-4	$(-)(-)$	$+$	No es solución
$[-1,1]$	0	$(-)(+)$	$-$	Si es solución
$[1,\infty)$	4	$(+)(+)$	$+$	No es solución

De donde la solución de la segunda desigualdad es $[-1,1]$

La unión de las dos soluciones, no da la solución de la desigualdad original, la cual es

$$(-\infty,-3], \quad [-1,1], \quad [3,\infty)$$

Ejercicios de la sección 1.7

En los ejercicios 1 a 10 resuelva la desigualdad cuadrática

1. $x^2 - 7x > 0$

2. $x^2 + 5x \le 0$

3. $x^2 + 7x + 10 < 0$

4. $x^2 + 1 \ge 0$

5. $x^2 + 9 < 0$

6. $x^2 < 30 - x$

7. $6x^2 - 4 \le 5x$

8. $12x^2 + 8x \ge 15$

9. $x^3 < 8$

10. $x^3 + 27 \ge 0$

En los ejercicios 11 a 30 resuelva la desigualdad racional

11. $\dfrac{x}{x-2} < 0$

12. $\dfrac{6x+3}{x} \ge 0$

13. $\dfrac{x}{2x+7} \le 4$

14. $\dfrac{x-5}{2x-3} > 2$

15. $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x-2} \le 0$

16. $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x-5} \ge 0$

17. $\dfrac{10x-1}{x+1} \le 9$

18. $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{3}{x-5}$

19. $\dfrac{4}{3-x} < \dfrac{2}{x+2}$

20. $x + \dfrac{1}{x-2} > 4$

21. $2 + \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{x-2}$

22. $4 + \dfrac{1}{x-2} \ge \dfrac{1}{x+2}$

23. $\dfrac{1}{x-3} < -x - 1$

24. $x \le \dfrac{3}{3-x}$

25. $\dfrac{25}{x+1} \ge 9 - x$

26. $\dfrac{x+6}{16} > \dfrac{1}{2-x}$

27. $\dfrac{2x^2+5}{x} > 0$

28. $\dfrac{21}{x+2} + \dfrac{2}{2x-7} \le \dfrac{11}{2}$

29. $\dfrac{(x-4)^2}{(x+3)^3} \ge 0$

30. $\dfrac{2x-7}{(x-3)^2(x-4)^3} \le 0$

En los ejercicios 31 a 35 resuelva la desigualdad cuadrática con valor absoluto

31. $|x^2-1| < 1$

32. $|x^2-10| > 6$

33. $|x^2+4| \ge 10$

34. $|x^2+7x+11| \ge 1$

35. $|x^2-14x+44| < 4$

36. Para que números, la suma del número y su recíproco es mayor que 2.

37. Si el largo de un rectángulo es 4 cm mayor que su ancho. Determine el intervalo de variación de su largo de manera que el área sea mayor que 25 cm^2.

38. Si las ganancias de una empresa que produce y vende x unidades son $160x - x^2 - 4800$. Determine el número de unidades que producirán ganancias mayores o iguales a 1,200.

39. Carlos tiene notas parciales de 60, 82, y 73 puntos. Si las notas parciales equivalen a 70% de la nota final del curso, Calcule la nota que debe sacar en el examen final para aprobar el curso con una nota mayor o igual a 61 puntos.

40. Se quiere medir un volumen de 1000 centímetros cúbicos utilizando un recipiente de vidrio 5 cm de radio. Determine el intervalo de variación de la altura h si el valor absoluto de la diferencia entre el volumen medido y el volumen exacto debe ser menor o igual que 10 centímetros cúbicos.