1.6 Desigualdades

OBJETIVOS

- Resolver desigualdades lineales en una variable.
- Resolver desigualdades con valor absoluto.
- Resolver problemas expresados en palabras que tienen como modelo una desigualdad lineal.

Una desigualdad es una proposición en la cual se relacionan dos o más expresiones algebraicas o que no son iguales. Así como en las ecuaciones se utiliza el símbolo “ = ” para indicar la igualdad de las expresiones, en las desigualdades se utilizan cuatro símbolos para representar la relación entre las expresiones

$a > b$ Se lee a es mayor que b y significa que el número real a es mayor que el número real b.

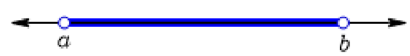
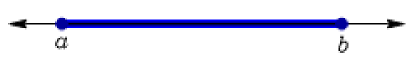
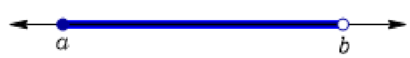
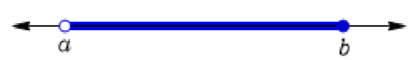
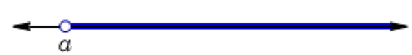
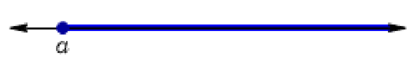
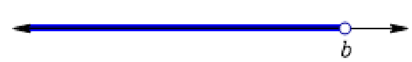
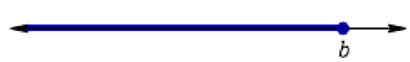
$a < b$ Se lee a es menor que b y significa que el número real a es menor que el número real b.

$a \geq b$ Se lee a es mayor o igual que b y significa que el número real a es mayor que el número real b pero también puede ser que los números sean iguales.

$a \leq b$ Se lee a es menor o igual que b y significa que el número real a es menor que el número real b pero también puede ser que los números sean iguales.

La solución de una desigualdad es el conjunto de todos los números que hacen la proposición verdadera. Generalmente la solución de una desigualdad es un subconjunto infinito de números reales que lo representamos por medio de intervalos.

Aunque los intervalos y sus operaciones debieron ser estudiados por el estudiante en cursos previos a éste, en la tabla siguiente se muestran los diferentes tipos y sus formas de representación.

Tipos de intervalos		
Notación	**Desigualdad**	**Gráfica**
(a,b)	$a < x < b$	
$[a,b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a,b)$	$a \leq x < b$	
$(a,b]$	$a < x \leq b$	
(a,∞)	$a < x$	
$[a,\infty)$	$a \leq x$	
$(-\infty,b)$	$x < b$	
$(-\infty,b]$	$x \leq b$	

Desigualdades lineales

Para resolver una desigualdad se utilizan las propiedades de las desigualdades, las cuales producen desigualdades equivalentes, es decir desigualdades que tienen la misma solución que la desigualdad dada. La tabla siguiente muestra las propiedades de las desigualdades

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Si a, b y c son números reales se tiene

Propiedad aditiva:

Si se suma o resta el mismo número real a ambos lados de una desigualdad, la desigualdad se mantiene, es decir

$$\text{Si } a < b \text{ entonces } a + c < b + c$$

Propiedad multiplicativa:

a. Si se multiplica o divide ambos lados de una desigualdad por el mismo número real positivo, el sentido de la desigualdad se mantiene, es decir

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > 0 \text{ entonces } ac < bc$$

b. Si se multiplica o divide ambos lados de una desigualdad por el mismo número real negativo, el sentido de la desigualdad se invierte, es decir

$$\text{Si } a < b\,,\ \text{y } c < 0 \text{ entonces } ac > bc$$

Ejemplo 1: Representaciones de un intervalo

Represente la desigualdad dada como un intervalo y en forma gráfica

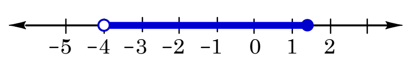
$$-4 < x \le \frac{3}{2}$$

Solución

La desigualdad dada incluye a todos los números mayores que -4 (no se incluye a -4) y que son menores o iguales a $\frac{3}{2}$. La representación en nomenclatura de intervalo es

$$\left(-4, \frac{3}{2}\right]$$

La representación gráfica en la recta real es la siguiente



Ejemplo 2: Solución de una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad

$$4x - 3 > 8x - 5$$

Solución

Se utilizarán las propiedades de las desigualdades para despejar x

Restando $8x$ a ambos lados de la desigualdad y simplificando se tiene

$$4x - 3 > 8x - 5$$

$$4x - 3 - 8x > 8x - 5 - 8x$$

$$-4x - 3 > -5$$

Para eliminar el 3 en el lado izquierdo se suma 3 a ambos lados

$$-4x - 3 + 3 > -5 + 3$$

$$-4x > -2$$

Finalmente, para despejar x se divide ambos lados de la desigualdad entre –4, recuerde que al dividir una desigualdad entre un número negativo el sentido de la desigualdad se invierte

$$-4x > -2$$

$$\frac{-4x}{-4} < \frac{-2}{-4}$$

$$x < \frac{1}{2}$$

Es decir que la solución está formada por todos los números que son menores que $\frac{1}{2}$.

En notación de intervalo la solución puede expresarse como $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

En la práctica la desigualdad anterior suele resolverse omitiendo algunas operaciones, para que el proceso sea más rápido. A continuación se ilustra la solución más corta

$$4x - 3 > 8x - 5$$

Pasando a restar $8x$ al lado izquierdo y a sumar el 3 al lado derecho se obtiene

$$4x - 8x > -5 + 3$$

$$-4x > -2$$

Al pasar a dividir –4 al lado derecho el sentido de la desigualdad se invierte

$$x < \frac{-2}{-4}$$

$$x < \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3: Solución de una desigualdad lineal con dos operadores

Resuelva la desigualdad

$$-2 < \frac{1 - 3x}{7} \leq 4$$

Solución

En algunos casos este tipo de desigualdades pueden resolverse operando simultáneamente los dos operadores como se muestra a continuación

$$-2 < \frac{1 - 3x}{7} \leq 4$$

Multiplicando por 7 las tres expresiones y simplificando

$$(-2)(7) < \frac{(1 - 3x)(7)}{7} \leq (4)(7)$$

$$-14 < 1 - 3x < 28$$

Restando 1

$$-14 - 1 < 1 - 3x - 1 \leq 28 - 1$$

$$-15 < -3x \leq 27$$

Ahora se dividirá ambos lados entre –3, teniendo el cuidado de invertir el sentido de las desigualdades

$$\frac{-15}{-3} > \frac{-3x}{-3} \geq \frac{27}{-3}$$

$$5 > x \geq -9$$

Ordenando la desigualdad anterior se tiene que la solución es

$$-9 \leq x < 5$$

O en forma de intervalo

$$[-9, 5)$$

Otra forma de resolver este problema, consiste en dividir la desigualdad en las dos desigualdades

$$-2 < \frac{1-3x}{7} \quad \text{y} \quad \frac{1-3x}{7} \leq 4$$

Resolviendo la primera desigualdad

$$-2 < \frac{1-3x}{7}$$

$$-14 < 1 - 3x$$

$$3x < 1 + 14$$

$$x < \frac{15}{3}$$

$$x < 5$$

Resolviendo la segunda desigualdad

$$\frac{1-3x}{7} \leq 4$$

$$1 - 3x \leq 28$$

$$-3x \leq 28 - 1$$

$$-3x \leq 27$$

$$x \geq \frac{27}{-3}$$

$$x \geq -9$$

La solución de la desigualdad está formada por todos los números que son mayores o iguales que –9 y menores que 5, es decir por la intersección de los intervalos $(-\infty, 5)$ y $[-9, \infty)$. Por lo que la solución de la desigualdad es

$$-9 \leq x < 5 \text{ o en forma de intervalo } [-9, 5)$$

Ejemplo 4: Solución de una desigualdad racional

Resuelva la desigualdad

$$\frac{-5}{2x-3} \leq 0$$

Solución

El procedimiento para resolver desigualdades racionales se estudia detalladamente en la próxima sección, aunque algunas de ellas pueden resolverse utilizando las propiedades de las desigualdades y los procedimientos para resolver desigualdades lineales.

Observe que la fracción del lado izquierdo es menor o igual que cero. Como el numerador es negativo se tiene que el denominador de la fracción debe ser positivo para que la fracción sea negativa, es decir que $2x - 3 > 0$. El denominador no puede ser igual a cero ya que esto hace indefinida la fracción. Al resolver la desigualdad anterior se tiene que

$$2x - 3 > 0$$
$$2x > 3$$
$$x > \frac{3}{2}$$

Por lo que la solución de la desigualdad en forma de intervalo es $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

Desigualdades lineales con valor absoluto

Si bien para resolver una desigualdad que contiene valor absoluto se puede utilizar la definición de valor absoluto para redefinir las expresiones de manera que no contengan valor absoluto. En la mayoría de los problemas que se proponen en éste documento es más fácil resolverlo si se utiliza la siguiente propiedad

Propiedad del valor absoluto

Si $b > 0$ entonces

1. La desigualdad $|a| < b$ es equivalente a $-b < a < b$

2. La desigualdad $|a| > b$ es equivalente a $a < -b$ o $a > b$

Ejemplo 5: Solución de una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad

$$|2x + 5| \leq 3$$

Solución

Para resolver esta desigualdad utilizamos la propiedad 1, obteniendo

$$-3 \leq 2x + 5 \leq 3$$

La desigualdad anterior se resuelve en forma similar a la del ejemplo 2, su solución es

$$-3 - 5 \leq 2x + 5 - 5 \leq 3 - 5$$
$$-8 \leq 2x \leq -2$$
$$\frac{-8}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{-2}{2}$$
$$-4 \leq x \leq -1$$

En notación de intervalos la solución es $[-4, -1]$

Ejemplo 6: Solución de una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad

$$8 - 2|3 - 5x| < 4$$

Solución

Para poder utilizar las propiedades del valor absoluto primero debemos aislar el valor absoluto usando las propiedades de las desigualdades

$$8 - 2|3 - 5x| < 4$$
$$-2|3 - 5x| < 4 - 8$$
$$\frac{-2|3 - 5x|}{-2} > \frac{-4}{-2}$$
$$|3 - 5x| > 2$$

Ahora se utiliza la propiedad 2 del valor absoluto para descomponer en dos desigualdades

$$(-5x + 3) < -2 \qquad \text{o} \qquad (-5x + 3) > 2$$

Resolviendo las dos desigualdades se tiene

$$-5x + 3 < -2 \qquad\qquad -5x + 3 > 2$$
$$-5x < -2 - 3 \qquad\qquad -5x > 2 - 3$$
$$-5x < -5 \qquad\qquad -5x > -1$$
$$x > \frac{-5}{-5} \qquad\qquad x < \frac{-1}{-5}$$
$$x > 1 \qquad\qquad x < \frac{1}{5}$$

La solución del problema es la unión de las dos soluciones, es decir

$$\left(-\infty, \tfrac{1}{5}\right) \cup (1, \infty)$$

La resolución de algunos problemas expresados en palabras conduce al planteamiento de una desigualdad lineal, como se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 7: Aplicación de las desigualdades

La ecuación que relaciona la temperatura expresada en grados Celsius (C) con la temperatura expresada en grados Fahrenheit (F) es: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

Si en el mes de noviembre en la ciudad de Guatemala la temperatura se encuentra en el rango $15 < C < 28$. ¿Cuál es el intervalo de variación en grados Fahrenheit?

Solución

Se tiene que

$$15 < C < 28$$

Sustituyendo $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ se obtiene la desigualdad

$$15 < \frac{5}{9}(F - 32) < 28$$

Despejando F

$$(15)(9) < 5(F - 32) < (28)(9)$$
$$\frac{135}{5} < F - 32 < \frac{252}{5}$$
$$27 + 32 < F < 50.4 + 32$$
$$59 < F < 82.4$$

Por lo que la temperatura expresada en grados Fahrenheit varía entre 59º y 82.4º.

Ejercicios de la sección 1.6

En los ejercicios 1 a 5 exprese la desigualdad como un intervalo y dibuje su gráfica.

1. $x < 5$

2. $x \geq -3$

3. $-\frac{1}{2} < x \leq 4$

4. $-8 \geq x \geq -20$

5. $-\frac{5}{3} \leq x < \frac{3}{5}$

En los ejercicios 5 a 10 exprese el intervalo como una desigualdad y dibuje su gráfica.

6. $[-5,8)$

7. $(-\infty,4)$

8. $\left[-\frac{3}{2},\infty\right)$

9. $(-2,3) \cup [4,8]$

10. $(-\infty,-3] \cup (0,4]$

En los ejercicios 11 a 40 resuelva la desigualdad, exprese la respuesta en forma de intervalo y en forma gráfica

11. $4x - 8 < 12$

12. $4x - 2 > 3x + 1$

13. $-6 - 3x \leq -3$

14. $2x - 5 \geq 5x + 2$

15. $8 - \dfrac{2x}{3} < x + \dfrac{1}{3}$

16. $1 + x \geq \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4}$

17. $x(2x - 3) > (2x - 1)(x + 5)$

18. $(4x - 3)(x + 6) \leq (2x - 1)^2$

19. $(x + 1)(2x + 2) > \dfrac{1}{2}(x - 3)(4x - 4)$

20. $2x - 2x(6x + 5) > (3x + 2)(4x + 1) + 1$

21. $-3 < 2x + 1 < 2$

22. $4 > 5x - 3 \geq 0$

23. $-1 \leq \dfrac{3x + 1}{2} \leq 5$

24. $-2 \leq \dfrac{5x}{2} + 1 < 2$

25. $5 \geq \dfrac{6 - 5x}{5} > 1$

26. $\dfrac{1}{x + 1} < 0$

27. $\dfrac{-4}{5 - 2x} > 0$

28. $\dfrac{3}{(x + 4)^2} > 0$

29. $\dfrac{4}{5x + 3} > 0$

30. $\dfrac{1}{x^2 + 9} < 0$

31. $|3x + 1| < 2$

32. $|2x - 3| \leq 6$

33. $|2x| > 5$

34. $|2x + 1| - 3 \geq 0$

35. $|-7x - 3| \geq 5$

36. $2 - \dfrac{1}{3}|2 - 3x| \geq 10$

37. $\left|\dfrac{3x - 5}{2}\right| < 4$

38. $4\left|\dfrac{2 - x}{3}\right| + 1 > 4$

39. $\dfrac{2}{|x - 5|} > 0$

40. $\dfrac{4}{|4 - 3x|} < 4$

41. En el puerto de San José las temperaturas en grados Celsius varían aproximadamente entre $15 \leq C \leq 34$. Utilice la relación entre grados Celsius y Fahrenheit del ejemplo 7 para encontrar el intervalo de variación de la temperatura en el Puerto de San José en grados Fahrenheit.

42. Si una empresa produce x unidades de cierto producto el costo de producción está dado por $c = 5.8x + 300$. Determine el intervalo de producción de tal forma que los costos sean menores o iguales a 5,000

43. En cierto circuito eléctrico, las resistencias R, R_1 y R_2, satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si $R_1 = 15$, ¿qué valores de R_2 hacen que $R \leq 10$?