1.3 Números complejos

OBJETIVOS

- Expresar números complejos en forma estándar.
- Efectuar operaciones con la unidad imaginaria.
- Efectuar operaciones de suma, resta, producto y división de números complejos.

Los números complejos fueron utilizados por primera vez en el año 1950 para resolver cierto tipo de ecuaciones, pero por mucho tiempo los matemáticos no los consideraron números legítimos. Leibniz que junto con Newton fue uno de los grandes matemáticos del siglo XVII, los llamó anfibios, entre el ser y no ser. Fue Descartes el primer matemático que los llamó números imaginarios, nombre que ha permanecido a la fecha. En la actualidad los números complejos son aceptados por todos los matemáticos y tienen muchas aplicaciones en las ciencias.

Usualmente los números complejos son introducidos cuando se intenta resolver ecuaciones cuya solución es la raíz cuadrada de números negativos. Por ejemplo la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

Tiene como solución

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

El número $\sqrt{-1}$ es llamado **número imaginario** y se representa con la letra i. La definición formal es la siguiente

DEFINICIÓN DE i

El número i llamado unidad imaginaria, se define como

$$i = \sqrt{-1}$$

De tal forma que $i^2 = -1$.

A partir de la definición de i se puede definir la raíz cuadrada de cualquier número negativo en la forma siguiente

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$$

Por ejemplo,

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,i = 3i$$

$$\sqrt{-27} = \sqrt{27}\,i = 3\sqrt{3}\,i$$

Potencias de la unidad imaginaria

Ahora que se ha definido la unidad imaginaria, se pueden calcular sus potencias como se muestra a continuación

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

Las demás potencias de la unidad imaginaria se obtienen a partir de las dos potencias anteriores

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$$
$$i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = \left(i^2\right)^2 \cdot i = (-1)^2 \cdot i = (1)i = i$$
$$i^6 = \left(i^2\right)^3 = (-1)^3 = -1$$
$$i^7 = i^6 \cdot i = \left(i^2\right)^3 \cdot i = (-1)^3 \cdot i = (-1)i = -i$$

Siguiendo el procedimiento mostrado para calcular las primeras 7 potencias de i es posible calcular cualquier potencia de la unidad imaginaria como se ilustra en el ejemplo siguiente

Ejemplo 1: Calculando potencias de i

Calcule las potencias de i

a. i^{51} **b.** i^{96}

Solución

a. Cualquier potencia de i se puede expresar como una potencia de i^2 como se muestra a continuación

$$i^{51} = i^{50} \cdot i = (i^2)^{25} \cdot i = (-1)^{25} \cdot i = (-1)i = -i$$

b. Procediendo de la misma forma que el inciso anterior

$$i^{96} = (i^2)^{48} \cdot i = (-1)^{48} = 1$$

Definición de número complejo

Ahora que ya se ha definido la unidad imaginaria se puede definir formalmente el concepto de número complejo

Definición de número complejo

Si a y b son números reales e i es la unidad imaginaria, entonces $a + bi$ es llamado **número complejo**. El número real a es llamado **parte real** y el número real b es llamado **parte imaginaria** del número complejo.

Los números reales son un subconjunto de los números complejos y se obtienen haciendo $b = 0$ ya que

$$a + bi = a + 0i = a$$

Cuando la parte real de un número complejo es cero el número complejo es llamado **número imaginario** o número imaginario puro.

$$a + bi = 0 + bi = bi$$

Un número complejo esta expresado en **forma estánd**ar si tiene la forma $a + bi$.

Ejemplo 2: Forma estándar de números complejos

Escriba los siguientes números complejos en forma estándar

a. $\sqrt{-32}$ **b.** $3+\sqrt{-9}$ **c.** $-\sqrt{-40}-3$

Solución

a. En éste caso se debe simplificar el radical en la forma siguiente

$$\sqrt{-32} = \sqrt{32}\,i = 4\sqrt{2}\,i$$

b. La forma estándar que se obtiene es

$$3+\sqrt{-9} = 3+\sqrt{9}\,i = 3+3i$$

c. La forma estándar es

$$-\sqrt{-40}-3 = -3-\sqrt{40}\,i = -3-2\sqrt{10}\,i$$

Operaciones con números complejos

En esta sección solamente se estudiarán las operaciones fundamentales de los números complejos suma, resta, producto y división. Previo a definir las operaciones mencionadas se define la igualdad entre números complejos

Números complejos iguales

Los números complejos $a+bi$ y $c+di$, son iguales si y solo sí $a=c$ y $b=d$.

La definición anterior permite estableces en cualquier momento la igualdad entre dos números complejos. Por ejemplo si los números complejos $-3+5i$ y $c+di$ son iguales, se puede concluir fácilmente que $c=-3$ y $d=5$.

Suma y resta de números complejos

Si $a+bi$ y $c+di$, son dos números complejos, las operaciones de suma y resta se definen de la forma siguiente

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(bi+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(bi-di) = (a-c)+(b-d)i$$

Es decir que para sumar o restar dos números complejos se suman o restan sus partes reales y se suman o restan sus partes complejas. El procedimiento es el mismo que se utiliza para la suma o resta de polinomios.

Ejemplo 3: Suma y resta de números complejos

Efectúe las operaciones que se indican

a. $(4-5i)+(7+3i)$ **b.** $3i-(4-5i)$

Solución

a. Desarrollando la suma en la misma forma que se desarrolla la suma de polinomios se tienen que sumar los términos semejantes, es decir que sumamos las partes reales y las partes complejas entre si

$$\begin{aligned}(4-5i)+(7+3i) &= (4+7)+(-5i+3i)\\ &= 13-2i\end{aligned}$$

b. La resta se desarrolla en forma similar, como una resta de polinomios

$$\begin{aligned}3i-(4-5i) &= (0-4)+(3i-(-5i))\\ &= -4+8i\end{aligned}$$

El producto de números complejos se define de la forma siguiente

Producto de números complejos

Si $a+bi$ y $c+di$, son dos números complejos, el producto se define como

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 = ac+bd(-1)+(ad+bc)i\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

Ejemplo 4: Producto de números complejos

Efectúe las operaciones que se indican

a. $(4-5i)(7+3i)$ **b.** $3i\cdot(4-5i)$

Solución

a. El producto de números complejos se efectúa en forma similar al producto de polinomios, tomando en cuenta que las potencias de la unidad imaginaria tienen sus propias reglas

$$\begin{aligned}(4-5i)(7+3i) &= 28+12i-35i-15i^2\\ &= 28-23i-15(-1)\\ &= 28+15-23i\\ &= 43-23i\end{aligned}$$

b. En éste caso se tiene

$$\begin{aligned}3i\cdot(4-5i) &= 12i-15i^2\\ &= 12i-15(-1)\\ &= 15+12i\end{aligned}$$

Otra definición importante es la de **número complejo conjugado**, que se utiliza para simplificar expresiones complejas que tienen operaciones de división.

Números complejos conjugados

Los números complejos $a+bi$ y $a-bi$, son llamados **números complejos conjugados** y tienen la propiedad de que su producto es un número real.

Se puede comprobar rápidamente que el producto es un número real ya que

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2(-1)=a^2+b^2$$

La división de dos números complejos se obtiene multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, para obtener un número real en el denominador

División de números complejos

Si $a+bi$ y $c+di$, son dos números complejos, la división se define como

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}\\&=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=\frac{ac-adi+bci-bd(-1)}{c^2-d^2(-1)}\\&=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

Ejemplo 5: División de números complejos

Efectúe las operaciones que se indican

a. $\dfrac{1-i}{5+2i}$ **b.** $\dfrac{3}{i}-\dfrac{3i}{4-2i}$

Solución

a. Para efectuar la división se multiplica el numerador el denominador por el conjugado del denominador

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{5+2i}&=\frac{1-i}{5+2i}\cdot\frac{5-2i}{5-2i}=\\&=\frac{5-2i-5i+2i^2}{25-4i^2}=\frac{5+2(-1)-7i}{25-4(-1)}\\&=\frac{3-7i}{29}=\frac{3}{29}-\frac{7}{29}i\end{aligned}$$

b. Primero se simplificará la expresión como una resta de fracciones y luego se efectuará la división resultante.

$$\frac{3}{i}-\frac{3i}{4-2i}=\frac{3(4-2i)-3i^2}{i(4-2i)}=\frac{12-6i+3}{4i-2i^2}=\frac{15-6i}{2+4i}$$

Ahora se puede desarrollar la división resultante

$$\begin{aligned}\frac{3}{i}-\frac{3i}{4-2i}&=\frac{15-6i}{2+4i}\cdot\frac{2-4i}{2-4i}\\&=\frac{30-12i-60i+24i^2}{4-16i^2}=\frac{30+24(-1)-72i}{4-16(-1)}\\&=\frac{6-72i}{20}=\frac{6}{20}-\frac{72}{20}i\\&=\frac{3}{10}-\frac{18}{5}i\end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 1.3

En los ejercicios 1 a 5 escriba los números complejos en forma estándar

1. $2+\sqrt{-9}$

2. $4-\sqrt{-121}$

3. $8+\sqrt{-27}$

4. $-\sqrt{-162}$

5. $2\sqrt{-100}$

En los ejercicios 6 a 10 simplifique las potencias de i

6. i^{10}

7. i^{29}

8. i^{223}

9. i^{5000}

10. i^{5041}

En los ejercicios 11 a 30 efectúe la suma, resta, producto o división de números complejos y exprese la respuesta en forma estándar

11. $(2+5i)+(3-7i)$

12. $(7-5i)-(-5-2i)$

13. $6i+(4-3i)$

14. $2(2-7i)+5(2-2i)$

15. $6(4-3i)-2(3+4i)$

16. $(2i)(-6i)$

17. $-4(8i)$

18. $(5i)^2(-2i)$

19. $(2+3i)(5i)$

20 $(7-5i)(7+5i)$

21. $(1-i)(-1-3i)$

22. $(11-8i)(-4-i)$

23. $(3-2i)^2$

24. $\dfrac{5-i}{2i}$

25. $\dfrac{1-i}{1+i}$

26. $\dfrac{-3}{4-2i}$

27. $\dfrac{4-3i}{-3-5i}$

28. $\dfrac{2i}{11-i}$

29. $\dfrac{2+\sqrt{5}\,i}{4-\sqrt{5}\,i}$

30. $\dfrac{-1-2\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}-3\sqrt{3}\,i}$

En los ejercicios 31 a 41 simplifique la expresión con números complejos

31. $(1-i)-2(4+i)^2$

32. $(2+i)^3$

33. $(2i)^3\,i^{12}$

34. $3-4i-(3+4i)(-1+2i)$

35. $\dfrac{5-2i}{3+4i}-\dfrac{5+2i}{3-4i}$

36. $\dfrac{i^7+2i^2}{i^3}$

37. $\dfrac{1-i}{i}-\dfrac{i}{1+i}$

38. $\dfrac{(3+2i)(3-2i)}{2\sqrt{3}+i}$

39. $\left[2-\left(3-\sqrt{5}\right)i\right]\left[2+\left(3-\sqrt{5}\right)i\right]$

40. $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

41. $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{27}+i^{28}$