# 1.1 Ecuaciones lineales

## OBJETIVOS

- Resolver ecuaciones lineales en una variable.
- Resolver ecuaciones que conducen a una ecuación lineal utilizando las propiedades de las ecuaciones.
- Resolver ecuaciones con fracciones y cuya solución conduce a una ecuación lineal.

## Ecuaciones

Una ecuación algebraica de una variable es un enunciado de la forma

$$A = B$$

En donde $A$ y $B$ son expresiones algebraicas con una sola variable. A continuación se muestran algunos ejemplos de ecuaciones con una variable:

$$2x - 5 = 4x - 8$$

$$\frac{t}{t-5} = \frac{1}{t}$$

$$p^2 - 3p + 5 = 0$$

Se dice que un número es una ***solución*** **o** ***raíz*** de una ecuación, si al sustituir dicho número por la variable de la ecuación obtenemos un enunciado verdadero. Por ejemplo, para probar que el número 2 es una solución de la ecuación

$$\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4} = 6$$

Se sustituye el número 2 en lugar de la variable $x$, se efectúan las operaciones aritméticas en cada lado de la ecuación

$$\frac{7(2)+3}{2} - \frac{9(2)-8}{4} = 6$$

$$\frac{17}{2} - \frac{10}{4} = 6$$

$$\frac{17-5}{2} = 6$$

$$6 = 6$$

como el enunciado que se obtuvo es verdadero, decimos que $x = 2$ es una solución de la ecuación anterior.

Dos ecuaciones se dice que son ***ecuaciones equivalentes*** si tienen exactamente las mismas soluciones, por ejemplo las ecuaciones

$$6x - 12 = 0 \quad \text{y} \quad x - 1 = 1$$

son equivalentes porque ambas tienen como única solución al número $x = 2$.

Se dice que una ecuación es una ***identidad***, cuando cualquier valor que tome la variable da como resultado un enunciado verdadero. Por ejemplo, la ecuación:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

es una identidad, pues al sustituir $x$ por cualquier número real se obtiene un enunciado verdadero. Mientras que una se llama ***ecuación condicional*** o simplemente ecuación, cuando solamente algunos números son soluciones de la misma.

Por ejemplo la ecuación

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Tiene solamente dos soluciones que son $x = 3$ y $x = -2$.

## Solución de una ecuación

*Resolver* una ecuación consiste en encontrar los valores de la variable que hacen que el enunciado sea verdadero. Para ello se transforma la ecuación en una serie de ecuaciones equivalentes, hasta obtener la solución de la ecuación. Estas transformaciones se fundamentan en dos propiedades de las ecuaciones, la *propiedad aditiva* y la *propiedad multiplicativa.* Estas propiedades se enuncian a continuación

**Propiedades de las ecuaciones**

**1.** Simplificar cualquiera de los lados de la ecuación utilizando las operaciones algebraicas y las propiedades de los números reales. Las dos ecuaciones siguientes son equivalentes

$$7x + 6 - 5x = 8$$

$$2x + 6 = 8$$

**2.** Sumar o restar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación produce ecuaciones equivalentes, como se ilustra con el siguiente ejemplo

$$2x + 6 = 8$$

$$2x + 6 - 6 = 8 - 6$$

$$2x = 2$$

En general si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.

**3.** Multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por una cantidad diferente de cero, produce ecuaciones equivalentes, como por ejemplo

$$\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

En general si $a = b$ y $c \neq 0$ entonces $ac = bc$.

Para ilustrar el uso de las propiedades de las ecuaciones se presenta el siguiente ejemplo

## Ejemplo 1: Uso de las propiedades de las ecuaciones

Resuelva la ecuación

$$2x + 4(50 - x) = 140$$

## Solución

Desarrollando el producto entre paréntesis y sumando términos semejantes se tiene

$$2x + 200 - 4x = 140$$

$$-2x + 200 = 140$$

Ahora se resta 200 a ambos lados de la ecuación (propiedad aditiva) y luego simplificando

$$-2x + 200 - 200 = 140 - 200$$
$$-2x = -60$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación anterior entre –2, se obtiene el valor de $x$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-60}{-2}$$
$$x = 30$$

Para comprobar que el valor de obtenido, es en realidad la solución de la ecuación, se sustituye éste valor en la ecuación original y se realizan las operaciones aritméticas resultantes

$$2(30) + 4(50 - 30) = 140$$
$$60 + 4(20) = 140$$
$$60 + 80 = 140$$
$$140 = 140$$

Como la última expresión es un enunciado verdadero, se concluye que la solución de la ecuación es $x = 30$ .

Cuando se resuelve una ecuación es normal que se quiera llegar a la respuesta lo antes posible, en este sentido, suelen omitirse algunos pasos cuando se utilizan las propiedades de las ecuaciones. Comúnmente se dice que si un número está sumando en un lado de la ecuación, pasa al otro lado restando; o bien que si un número está multiplicando en un lado pasa al otro lado dividiendo. En realidad lo que se está haciendo es utilizar las propiedades de las ecuaciones en una forma abreviada. En la práctica el ejemplo anterior suele resolverse como se muestra a continuación

$$2x + 4(50 - x) = 140$$
$$2x + 200 - 4x = 140$$
$$-2x + 200 = 140$$

Como 200 está sumando en el lado izquierdo, pasa restando al otro lado de la ecuación, es decir

$$-2x = 140 - 200$$
$$-2x = -60$$

Como –2 está multiplicando a la incógnita $x$, pasa dividiendo al otro lado de la ecuación

$$x = \frac{-60}{-2}$$
$$x = 30$$

Si se observa cuidadosamente las dos soluciones es claro que la diferencia consiste en que se ha dejado de anotar algunos números, por lo demás ambos procedimientos son equivalentes.

Muchas de las aplicaciones en las ciencias se pueden modelar utilizando una ecuación lineal. Una ecuación lineal se define como:

**Ecuación lineal**

Una **Ecuación lineal** con variable $x$ es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax + b = 0$$

donde $a$ y $b$ son números reales, con $a \neq 0$

Las ecuaciones lineales generalmente pueden resolverse utilizando procedimientos que producen ecuaciones equivalentes, la solución general de una ecuación lineal es la siguiente

$$ax + b - b = -b$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

Muchas ecuaciones no se encuentran en forma lineal, pero pueden ser transformadas en una ecuación lineal utilizando las propiedades de las ecuaciones, como se muestra en los siguientes ejemplos.

## Ejemplo 2: Solución de una ecuación con productos

Resuelva la ecuación

$$(x+2)(5x-1) = 5x(x+1)$$

## Solución

Efectuando los productos a ambos lados de la ecuación se tiene

$$(x+2)(5x-1) = 5x(x+1)$$

$$5x^2 + 10x - x - 2 = 5x^2 + 5x$$

$$5x^2 + 9x - 2 = 5x^2 + 5x$$

Restando $5x^2$ a ambos lados de la ecuación

$$9x - 2 = 5x$$

Sumando 2 a ambos lados

$$9x = 5x + 2$$

Restando $5x$ a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$9x - 5x = 2$$

$$4x = 2$$

Dividiendo ambos lados entre 4 y simplificando

$$\frac{4x}{4} = \frac{2}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Para hacer la prueba se sustituye el resultado obtenido en la ecuación original, y se efectúan las operaciones aritméticas en cada lado de la ecuación

$$(x+2)(5x-1) = 5x(x+1)$$

$$\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{5}{2}-1\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{15}{4} = \frac{15}{4}$$

De donde se concluye que la solución es $x = \frac{1}{2}$

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento más apropiado para resolver una ecuación que contiene números racionales. Aunque es posible resolverla siguiendo caminos diferentes, se recomienda al estudiante resolver las ecuaciones siguiendo el procedimiento que aquí se muestra.

## **Ejemplo 3:** Solución de una ecuación con números fraccionarios

Resuelva la ecuación

$$\frac{5x}{2} - 5 = \frac{2x-4}{6}$$

## Solución

Para resolver una ecuación que contiene fracciones, lo primero que hay que hacer es obtener una ecuación equivalente que no contenga denominadores; para lograr esto se debe multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCM de todos los denominadores. En éste ejemplo El MCM de los denominadores es 6 ya que el 6 contiene exactamente al 2 y al 6. Multiplicando toda la ecuación por 6 obtenemos

$$6\left(\frac{5x}{2}-5\right) = 6\left(\frac{2x-4}{6}\right)$$

$$6\left(\frac{5x}{2}\right) - (6)(5) = 2x - 4$$

$$3(5x) - 30 = 2x - 4$$

Observe que primero se ha dividido el MCM entre cada denominador y una vez hecho esto, se procede a desarrollar los productos resultantes. Este procedimiento permite manejar números más pequeños que los que se hubieran obtenido si primero se desarrollan los productos.

Desarrollando productos y despejando la incógnita se tiene

$$15x - 2x = -4 + 30$$

$$13x = 26$$

$$x = \frac{26}{13}$$

$$x = 2$$

Al hacer la prueba se concluye que la solución de la ecuación es $x = 2$.

Los ejemplos que siguen son de dificultad más alta ya que las ecuaciones que se proponen no son lineales, pues contienen fracciones algebraicas. Al resolverlas utilizando las propiedades de las ecuaciones, muchas veces se reducen a una ecuación lineal. Es importante aclarar que la ecuación lineal que se obtiene no es equivalente en todos los reales a la ecuación propuesta, pues, cuando una ecuación contiene fracciones algebraicas con incógnita en el denominador; seguramente existen números reales para los cuales la fracción no está definida y por lo tanto éstos números nunca serán soluciones de la ecuación original, aunque si pueden ser soluciones de la ecuación lineal que se obtiene. En el ejemplo 5 se ilustra éste caso.

## **Ejemplo 4:** Solución de una ecuación con fracciones algebraicas

Resuelva la ecuación

$$\frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x-3} = \frac{3}{4x+6}$$

## Solución

Para resolver una ecuación que contiene fracciones algebraicas lo primero que hay que hacer es factorizar todos los denominadores presentes en la ecuación. Los denominadores $2x + 3$ y $x - 3$ no se pueden factorizar mientras que el tercer denominador tiene factor común 2,

$$4x + 6 = 2(2x + 3)$$

La ecuación con los denominadores factorizados es

$$\frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x-3} = \frac{3}{2(2x+3)}$$

Para obtener una ecuación equivalente a la anterior, que no contenga denominadores, se debe multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores

$$\text{MCM} = 2(2x+3)(x-3)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCM se obtiene

$$2(2x+3)(x-3)\left(\frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x-3}\right) = 2(2x+3)(x-3)\left(\frac{3}{2(2x+3)}\right)$$

Se desarrollan las operaciones pero teniendo el cuidado de dejar indicados los productos. Esto se hace así para cancelar los factores comunes al numerador y al denominador en cada una de las fracciones resultantes

$$\frac{2(2x+3)(x-3)(2)}{2x+3} - \frac{2(2x+3)(x-3)(1)}{x-3} = \frac{2(2x+3)(x-3)(3)}{2(2x+3)}$$

Al cancelar los factores comunes en cada fracción se obtiene una ecuación que no contiene denominadores. Observe que en la primera fracción se cancela el término $(2x + 3)$, en la segunda fracción se cancela el término $(x - 3)$ y en la fracción al lado derecho se cancela el 2 y el término $(2x + 3)$. Luego de cancelar los factores la ecuación resultante es

$$4(x-3) - 2(2x+3) = 3(x-3)$$

Ahora se puede resolver la ecuación siguiendo el procedimiento mostrado en los ejemplos 1 y 2

$$\begin{aligned} 4x - 12 - 4x - 6 &= 3x - 9 \\ -18 &= 3x - 9 \\ -3x &= -9 + 18 \\ x &= \frac{9}{-3} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Se deja al lector que realice la prueba, sustituyendo $x = -3$ en la ecuación inicial para comprobar que se ha encontrado la solución de la ecuación.

## Ejemplo 5: Ecuación con fracciones algebraicas sin solución

Resuelva la ecuación

$$1 + \frac{x}{x-5} = \frac{5}{x-5}$$

## Solución

Procediendo como en el ejemplo 4 se multiplica ambos lados de la ecuación por el MCM que para esta ecuación es $x - 5$

$$(x-5)\left(1 + \frac{x}{x-5}\right) = (x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right)$$

Al desarrollar productos y efectuar las operaciones resultantes se obtiene

$$\begin{aligned} (x-5) + x &= 5 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Pero $x = 5$ no es solución de la ecuación pues al sustituirlo en la ecuación inicial se obtiene una división entre cero

$$\begin{aligned} 1 + \frac{5}{5-5} &= \frac{5}{5-5} \\ 1 + \frac{5}{0} &= \frac{5}{0} \end{aligned}$$

Como la división entre cero no está definida, se concluye que la ecuación no tiene solución.

## Ejemplo 6: Solución de una ecuación con fracciones algebraicas

Resuelva la ecuación

$$\frac{2}{2x-1} + \frac{2}{x-7} = 1 - \frac{2x^2 - 1}{2x^2 - 15x + 7}$$

## Solución

La dificultad de ésta ecuación es mayor que la de los ejemplos anteriores. Como un primer paso se deben factorizar todos los denominadores y obtener el mínimo común múltiplo de ellos; los dos denominadores en el lado izquierdo de la ecuación no se pueden factorizar, mientras que $2x^2 - 15x + 7$ es un trinomio de la forma general, que se puede factorizar como

$$2x^2 - 15x + 7 = (2x - 1)(x - 7)$$

Como el mínimo común múltiplo es el producto de todos los factores tomando cada uno de ellos con el mayor exponente, se obtiene que el MCM $= (2x - 1)(x - 7)$. Si ninguno de los factores del MCM es igual a cero, se puede multiplicar ambos lados de la ecución por él, para obtener una ecuación equivalente que no contenga denominadores

$$(2x - 1)(x - 7)\left(\frac{2}{2x - 1} + \frac{2}{x - 7}\right) = (2x - 1)(x - 7)\left(1 - \frac{2x^2 - 1}{(2x - 1)(x - 7)}\right)$$

$$2(x - 7) + 2(2x - 1) = (2x - 1)(x - 7) - (2x^2 - 1)$$

Efectuando productos y sumando términos semejantes se tiene

$$\begin{aligned} 2x - 14 + 4x - 2 &= 2x^2 - x - 14x + 7 - 2x^2 + 1 \\ 6x - 16 &= -15x + 8 \\ 6x + 15x &= 8 + 16 \\ 21x &= 24 \\ x &= \frac{24}{21} = \frac{8}{7} \end{aligned}$$

Al hacer la prueba se puede verificar que la solución es $x = \dfrac{8}{7}$

Algunas ecuaciones tienen dos o más incógnitas o variables. En algunos casos es necesario despejar una variable en términos de las otras. El siguiente ejemplo ilustra una ecuación de éste estilo.

## **Ejemplo 7:** Solución de una ecuación con varias variables

En un circuito eléctrico con tres resistencias $R_1, R_2, R_3$, colocadas en paralelo, se desea encontrar el valor de una resistencia $R$, que es equivalente a las tres resistencias en paralelo. La ecuación que relaciona a las cuatro resistencias es la siguiente

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

**a.** Despejar $R$ en términos de las otras resistencias.

**b.** Si $R_1 = 530$, $R_2 = 1200$, $R_3 = 3500$, calcular el valor de $R$.

## Solución

**a.** Para despejar $R$, se puede comenzar eliminando los denominadores, para lograr esto se multiplica ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo, que en este caso es $RR_1R_2R_3$

$$(RR_1R_2R_3)\frac{1}{R} = (RR_1R_2R_3)\frac{1}{R_1} + (RR_1R_2R_3)\frac{1}{R_2} + (RR_1R_2R_3)\frac{1}{R_3}$$

Al cancelar los factores comunes al numerador y denominador de cada fracción se tiene

$$R_1R_2R_3 = RR_2R_3 + RR_1R_3 + RR_1R_2$$

Factorizando $R$ en el lado derecho de la ecuación anterior y despejando

$$R_1R_2R_3 = R(R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2)$$

$$R = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$$

**b.** Puesto que ya se ha despejado $R$, ahora solo hay que sustituir los valores dados: $R_1 = 530$, $R_2 = 1200$, $R_3 = 3500$,

$$R = \frac{(530)(1200)(3500)}{(1200)(3500) + (530)(3500) + (530)(1200)}$$

$$R = \frac{2226000000}{6691000}$$

$$R = 332.68$$

Es decir que en lugar de colocar las tres resistencias en paralelo, se puede colocar una resistencia equivalente con un valor aproximado de 332.68.

## Ejercicios de la sección 1.1

En los ejercicios 1 a 23, resuelva la ecuación propuesta, compruebe sus respuestas.

**1.** $13x - 8 = 8x + 2$

**2.** $6(w + 5) - 12 = 3(3w - 1) + 4w$

**3.** $(2q + 1)(3q + 1) = (6q - 1)(q + 2)$

**4.** $5(p - 1) - 5(p + 2) = -14$

**5.** $0.103 - 0.1x = 0.02x - 0.13x + 0.11$

**6.** $\frac{5x}{6} - 7 = \frac{x}{2} - 3$

**7.** $5 - \frac{3x}{4} = \frac{2x}{3} + 22$

**8.** $\frac{x}{10} + \frac{x}{12} + \frac{x}{15} = x - 6$

**9.** $\frac{2w - 3}{4} = w - 3$

**10.** $\frac{2x - 9}{3} - 2 = \frac{3x + 2}{5}$

**11.** $\frac{4q + 5}{5} = \frac{3q - 15}{2} + 2q - 5$

**12.** $\frac{3}{5x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{40}$

**13.** $\frac{2}{3x + 1} = \frac{1}{x}$

**14.** $\frac{4x - 3}{2x - 3} = \frac{8x + 5}{4x + 1}$

**15.** $\frac{4x - 3}{2x + 6} = \frac{7}{5x - 2}$

**16.** $\frac{7}{x + 1} - \frac{4}{x - 1} = \frac{3}{x + 5}$

**17.** $\frac{5}{2x + 3} + \frac{4}{2x - 3} = \frac{14x + 3}{4x^2 - 9}$

**18.** $\frac{4}{x - 2} - \frac{3}{x + 1} = \frac{8}{x^2 - x - 2}$

**19.** $\frac{5}{2p + 1} - \frac{4}{p - 1} = \frac{12p + 6}{2p^2 - p - 1}$

**20.** $\frac{2}{1 - 2w} + \frac{2}{7 - 2w} = 1 - \frac{4w^2 - 1}{4w^2 - 16w + 7}$

**21.** $\frac{3x}{6x^2 + 19x + 3} - \frac{2x - 5}{6x^2 + 17x - 3} = \frac{6x}{36x^2 - 1}$

**22.** $\frac{x^2 - 8}{x^2 - 7x + 10} - \frac{7x + 9}{x^2 - x - 20} = 1$

**23.** $\frac{x - 1}{x^2 + x} + \frac{3}{3x^2 + 7x + 4} = \frac{x - 3}{x^2 - 2x}$

En los ejercicios 24 a 35 despeje la variable indicada en términos de las otras variables. Simplifique la respuesta.

**24.** $mx - h = hx - m$, despejar $x$

**25.** $b(b - 2h) + c(c - 2h) + 2bc = 0$, despejar $h$

**26.** $\frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, despeje $t$

**27.** $a^3x - a^2 + ab = b^2 - b^3x$, despeje $x$

**28.** $\frac{w_1}{w_2} = \frac{f_2 - f}{f - f_1}$, despeje $f$

**29.** $S = \frac{rl - a}{r - l}$, despeje $r$

**30.** $I = \frac{E}{r + \frac{R}{n}}$, despeje $r$

**31.** $d = \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}a(t-1)^2$, despeje $t$

**32.** $\frac{bx^2}{c - ax} + b + \frac{bx}{a} = 0$

**33.** $\frac{m}{n-p} + \frac{n-p}{x} = \frac{m}{n+p} + \frac{n+p}{x}$, despeje $x$

**34.** $T = T_1\left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{h}{h_o}\right)$, despeje $n$

**35.** $wf = \left(\frac{w}{k} - 1\right)\frac{1}{k}$, despeje $w$