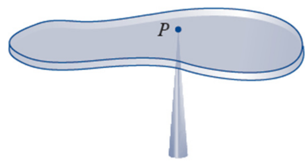
3.4 Centroides y centro de masa

OBJETIVOS

- Encontrar la fuerza ejercida sobre una compuerta plana debido a la presión ejercida por el agua sobre ella

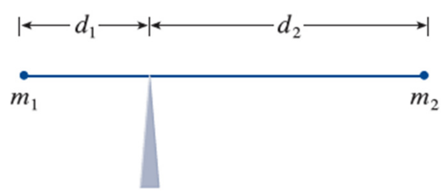
En este sección se estudian los métodos para calcular el centroide o centro de masa de una región plana de masa uniformemente distribuida. Este punto es aquel que haría que la región plana se mantendría en equilibrio al ser apoyada únicamente en un punto, como se muestra en la figura siguiente



Para desarrollar este tema es necesario comenzar con algunos conceptos previos de física.

Momentos y centroide de masas puntuales

Considere el caso más simple de dos masas puntuales m_1 y m_2, situadas a distancias d_1 y d_2 del centro de masa, como se muestra en la figura siguiente

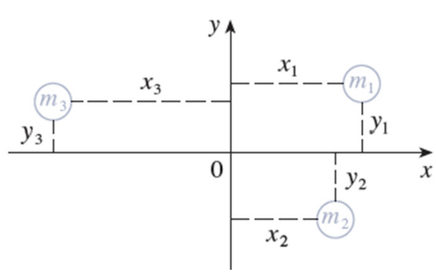


Para que el sistema este en equilibrio es necesario que

$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$

En Física al producto de la masa de un objeto multiplicado por la distancia a un punto, se le llama momento con respecto a ese punto.

En general, si se tienen varias partículas de masa puntual, el momento producido por ellas con respecto al sistema de coordenadas se define como



Momento respecto al eje *y*

$$M_y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Momento respecto al eje *x*

$$M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \cdots + m_n y_n = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Una vez calculados los momentos con respecto al origen del sistema de coordenadas. Las coordenadas del centro de masa de un conjunto de masas puntuales de define como

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

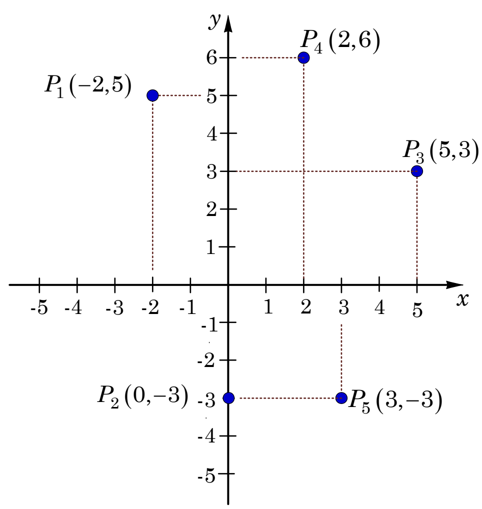
Ejemplo 1: Centro de masa de masas puntuales

Obtenga el centro de masa del conjunto de masas dadas, que se encuentran localizadas en los puntos dados

$m_1 = 8, \quad P_1(-2,5), \quad m_2 = 5, \quad P_2(0,-3); \quad m_3 = 4, \quad P_3(5,3) \quad m_4 = 10, \quad P_4(2,6) \quad m_5 = 7, \quad P_5(3,-3)$

Solución

La siguiente figura muestra la distribución de las masas en un sistema de coordenadas rectangulares



La coordenada *x* del centro de masa es

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} = \frac{(8)(-2) + (5)(0) + (4)(5) + (10)(2) + (7)(3)}{8 + 5 + 4 + 10 + 7}$$

$$= \frac{45}{34} = 1.32$$

La coordenada y del centro de masa es

$$\overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 + m_5 y_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} = \frac{(8)(5) + (5)(-3) + (4)(3) + (10)(6) + (7)(-3)}{8 + 5 + 4 + 10 + 7}$$

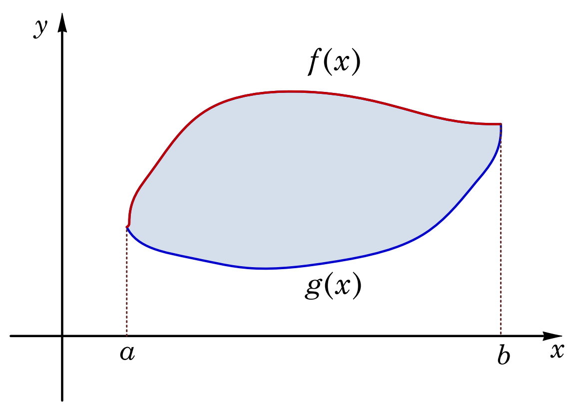
$$= \frac{76}{34} = 2.24$$

Por lo que las coordenadas del centro de masa son

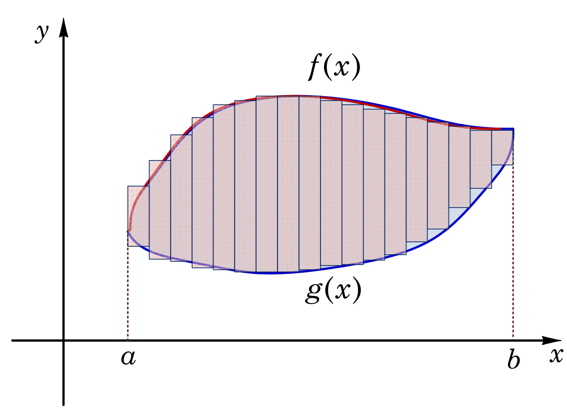
$$(\overline{x}, \overline{y}) = (1.32, 2.24)$$

Centro de masa de una región plana

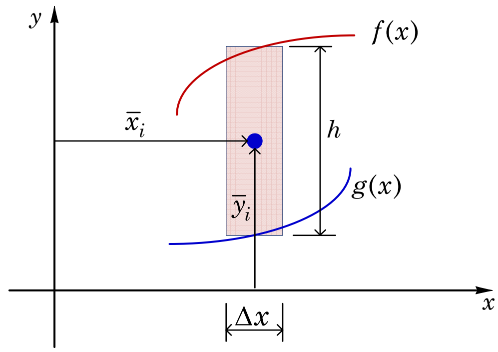
Considera ahora una lámina delgada de masa distribuida uniformemente, limitada en la parte superior por la función $y = f(x)$ y en la parte inferior por la función $y = g(x)$. Como se muestra en la figura.



Se puede suponer que la lámina está formada por una cantidad infinita de láminas en forma de rectángulo de ancho Δx y altura $h = f(x) - g(x)$, como se muestra en la siguiente figura.



Al considerar uno de los elementos diferenciales, para obtener su masa y los momentos con respecto a los ejes de coordenadas se tiene



La masa del diferencial de área esta dada por el área del elemento diferencial, multiplicado por la densidad ρ de la lámina

$$m_i = \rho A_i = \rho[f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$

La masa total de la lámina es

$$m = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i = \int_a^b dm = \int_a^b \rho dA$$

$$m = \int_a^b \rho[f(x) - g(x)]dx = \rho\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \rho A$$

El momento con respecto al eje y del elemento diferencial está dado por

$$M_{yi} = m_i\bar{x}_i = \rho[f(x_i) - g(x_i)]\Delta x \cdot x_i$$
$$= \rho x_i[f(x_i) - g(x_i)]dx$$

El momento total con respecto al eje y está dado por

$$M_y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_{yi} =$$

Por lo que la coordenada x del centro de masa es

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \rho x[f(x) - g(x)]dx}{\rho A}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

El momento con respecto al eje x del elemento diferencial está dado por

$$M_{xi} = m_i\bar{y}_i = \rho[f(x_i) - g(x_i)]\Delta x \cdot \frac{1}{2}[f(x_i) + g(x_i)]$$

$$= \frac{\rho}{2}\left[(f(x_i))^2 - (g(x_i))^2\right]dx$$

El momento total con respecto al eje x está dado por

$$M_x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = \int_a^b \frac{\rho}{2}\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]dx$$

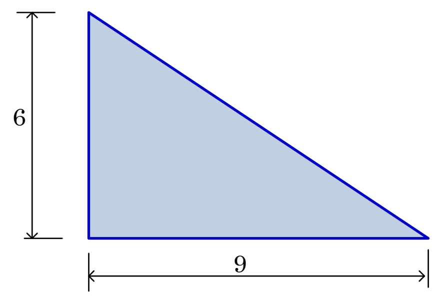
Por lo que la coordenada y del centro de masa es

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b \frac{\rho}{2}\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]dx}{\rho A}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]dx$$

Ejemplo 2: Centroide de una región plana

Encuentre el centroide del triángulo rectángulo que se muestra en la figura siguiente



Solución

Comenzamos situando el triángulo en un sistema de ejes coordenados y encontrando la ecuación de la recta. Se obtiene que la recta pasa por los puntos $(0,6)$ y $(9,0)$

La pendiente de la recta es

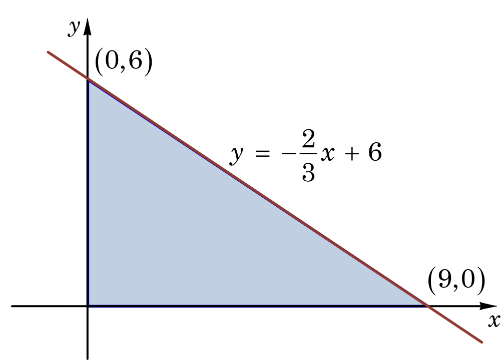
$$m = \frac{0-6}{9-0} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

La ecuación de la recta es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 9)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 6$$



Para calcular el área no es necesario utilizar integrales ya que es suficiente con utilizar el área de un triángulo

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(9)(6) = 27$$

La coordenada en x del centroide es

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^9 x\left[\left(-\frac{2}{3}x + 6\right) - (0)\right]dx = \frac{1}{27}\int_0^9\left(-\frac{2}{3}x^2 + 6x\right)dx$$

$$= \frac{1}{27}\left[-\frac{2}{9}x^3 + 3x^2\right]_0^9 = \frac{1}{27}\left[\left(-\frac{2}{9}(9)^3 + 3(9)^2\right) - (0)\right] = \frac{1}{27}(-162 + 243)$$

$$= 3$$

La coordenada en y del centroide es

$$\overline{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]dx = \frac{1}{2(27)}\int_0^9\left[\left(-\frac{2}{3}x + 6\right)^2 - (0)^2\right]dx$$

$$= \frac{1}{54}\int_0^9\left(\frac{4}{9}x^2 - 8x + 36\right)dx = \frac{1}{54}\left[\frac{4x^3}{27} - 4x^2 + 36x\right]_0^9$$

$$= \frac{1}{54}\left[\left(\frac{4(9)^3}{27} - 4(9)^2 + 36(9)\right) - (0)\right] = \frac{1}{54}(108)$$

$$= 2$$

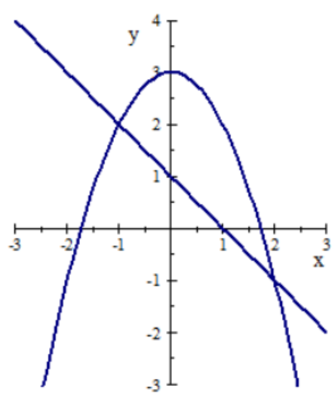
Por lo que el centro de masa se localiza en el punto $(3, 2)$

Ejemplo 3: Centroide de una región plana

Encontrar el centroide de la región limitada por la curva $y = 3 - x^2$ y la recta $x + y - 1 = 0$

Solución

La figura muestra la región limitada por la parábola y la recta.



Para encontrar los puntos de intersección igualamos las ecuaciones y resolvemos la ecuación resultante

$$3 - x^2 = 1 - x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2 \quad \& \quad x = -1$$

El área de la región está dada por

$$
\begin{aligned}
A &= \int_a^b \left[\left(3 - x^2\right) - (1 - x)\right] dx \\
&= \int_{-1}^{2} \left(2 - x^2 + x\right) dx \\
&= \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left[4 - \frac{8}{3} + 2\right] - \left[-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

La coordenada x del centroide es

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{A}\int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right] dx \\
&= \frac{1}{4.5}\int_{-1}^{2} x\left[\left(3 - x^2\right) - (1 - x)\right] dx \\
&= \frac{1}{4.5}\int_{-1}^{2} x(2 - x^2 + x)\, dx \\
&= \frac{1}{4.5}\int_{-1}^{2} (2x - x^3 + x^2)\, dx \\
&= \frac{1}{4.5}\left(x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\
&= \frac{1}{4.5}\left[\left(4 - \frac{16}{4} + \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4.5} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

La coordenada y del centroide es

$$
\overline{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right] dx
$$

Donde $f(x) = 3 - x^2$ y $g(x) = 1 - x$, entonces

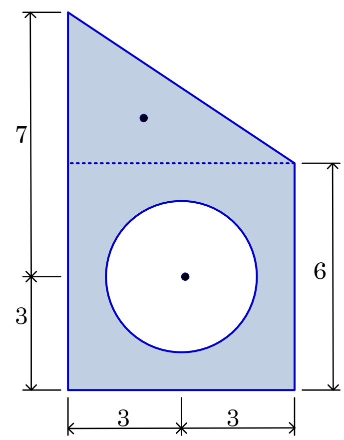
$$
\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{2A}\int_{-1}^{2} \left[\left(3 - x^2\right)^2 - (1 - x)^2\right] dx \\
&= \frac{1}{9}\int_{-1}^{2} \left[\left(9 - 6x^2 + x^4\right) - \left(1 - 2x + x^2\right)\right] dx \\
&= \frac{1}{9}\int_{-1}^{2} \left(8 - 7x^2 + x^4 + 2x\right) dx \\
&= \left(8x - \frac{7x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\
&= \frac{1}{9}\left[\left(16 - \frac{56}{3} + \frac{32}{5} + 4\right) - \left(-8 + \frac{7}{3} - \frac{1}{5} + 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{9} \cdot \frac{63}{5} = \frac{63}{45}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, las coordenadas del centroide de la figura so

$$
(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{63}{45}\right) \approx (0.5, 1.4)
$$

Ejemplo 4: Centroide de una región plana compuesta

Encontrar el centroide de la región Plana que se muestra en la figura siguiente, si el círculo interior tiene radio de 2 uniddes.

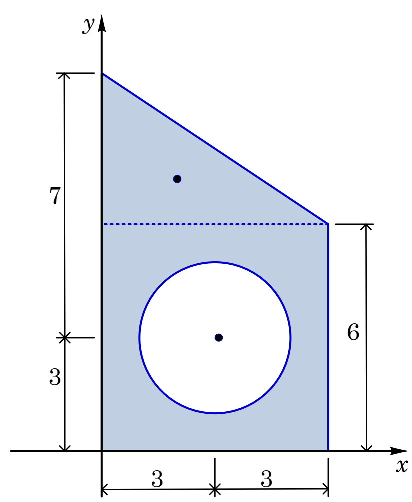


Solución

Aunque este ya es un problema más de física que de matemática, para resolverlo hay que considerar que la región plana está formada por varias regiones de masa puntual. Cada región tiene su masa concentrada en el centroide de cada una de las figuras planas conocidas que forman la lámina.

El claro que el centroide de un cuadrado y el de un círculo están en el centro del mismo, mientras que el de un triángulo rectángulo se localiza a 1/3 de la longitud de cada cateto.

Al situar la figura en sistema de coordenadas rectangulares se tiene



El centroide del cuadrado y el círculo están en el punto $(3,3)$. El centroide del triángulo está en el punto

$$\left(6+\frac{4}{3},\frac{6}{3}\right)=\left(\frac{22}{3},2\right)$$

Para calcular el centroide de toda la región se tomará el cuadrado completo y luego se restará el círculo

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 - m_3\bar{x}_3}{m_1 + m_2 - m_3} = \frac{\rho A_1\bar{x}_1 + \rho A_2\bar{x}_2 - \rho A_3\bar{x}_3}{\rho A_1 + \rho A_2 - \rho A_3}\\ &= \frac{\rho(A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 - A_3\bar{x}_3)}{\rho(A_1 + A_2 - A_3)} = \frac{(A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 - A_3\bar{x}_3)}{(A_1 + A_2 - A_3)}\\ &= \frac{(6)(6)(3) + \frac{1}{2}(6)(4)(2) - \pi(2)^2(3)}{(6)(6) + \frac{1}{2}(6)(4) - \pi(2)^2} = \frac{108 + 24 - 12\pi}{36 + 12 - 4\pi}\\ &= 2.66\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{m_1\bar{y}_1 + m_2\bar{y}_2 - m_3\bar{y}_3}{m_1 + m_2 - m_3} = \frac{\rho A_1\bar{y}_1 + \rho A_2\bar{y}_2 - \rho A_3\bar{y}_3}{\rho A_1 + \rho A_2 - \rho A_3}\\ &= \frac{\rho(A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 - A_3\bar{y}_3)}{\rho(A_1 + A_2 - A_3)} = \frac{(A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 - A_3\bar{y}_3)}{(A_1 + A_2 - A_3)}\\ &= \frac{(6)(6)(3) + \frac{1}{2}(6)(4)\left(\frac{22}{3}\right) - \pi(2)^2(3)}{(6)(6) + \frac{1}{2}(6)(4) - \pi(2)^2} = \frac{108 + 88 - 12\pi}{36 + 12 - 4\pi}\\ &= 4.47\end{aligned}$$

Por lo que el centroide se localiza en el punto $(2.66, 4.47)$

Ejercicios sobre momentos y centros de masa

En los problemas 1 a 15, determine las coordenadas del centro de masa de la región limitada por las curvas dadas

1. $y = 2x + 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

2. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$

3. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$

4. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

5. $y = 1 - x^2$; $2y = 1 + 2x$.

6. $y = 2x - 1$; $y = x^2 - 4$

7. $y = 4 - x^2$, $x + y = 2$

8. $y = x^2 - 4x$; $y = 2x$

9. $y = x^2 - 2x + 1$, y la recta $4x + y = 2$.

10. $y = x + 2$; $y = -x^2 + 4x + 2$

11. $y = -x^2 + 3$ & $y = x^2 - 2x - 1$

12. Plantee las integrales necesarias para encontrar los momentos y el centroide de la región acotada por encuentra delimitada por las curvas.

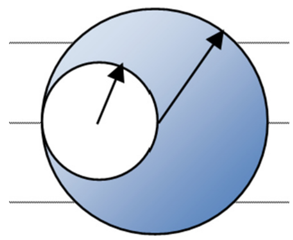
$$y = -x^2 \quad \& \quad y = 2x - 3$$

13. Plantee las integrales (no las calcule), para calcular el centroide de la región en el primer plana limitada por la curva $x^2 + y^2 = 25$, la recta $3x - 4y = 0$ y el eje y.

14. Trace la región acotada por las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x^2 - 1$ y estime en forma visual la ubicación del centroide, después plantee las integrales necesarias para calcular el centroide de la región acotada por las curvas.

15. Una pieza metálica tiene la forma que se muestra en la figura 1. Considere que el radio de la pieza es de 1.00 m y que el radio de la cavidad, que es circular, es de 0.5 m. bajo estas condiciones calcular:

El centroide la pieza, indicando respecto de que punto lo calculó



16. Calcule el centroide de la lámina plana de masa uniforme mostrada en la figura. Nota: utilice geometría para el cálculo de las áreas y las propiedades de simetría para obtener el centroide