1.4 Ecuaciones cuadráticas

OBJETIVOS

- Resolver ecuaciones cuadráticas por el método de factorización.
- Resolver ecuaciones cuadráticas por el método de completación de cuadrados.
- Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula general.

Ecuación cuadrática

Una **ecuación cuadrática** con variable x es aquella que puede escribirse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Los métodos utilizados frecuentemente para resolver ecuaciones cuadráticas son

- Factorización
- Completación de cuadrados
- Fórmula general

Solución por factorización

Para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ por éste método, es necesario que el polinomio $ax^2 + bx + c$ se pueda factorizar fácilmente como un producto de factores lineales; entonces la ecuación se puede resolver utilizando la propiedad del producto cero

PROPIEDAD DEL PRODUCTO CERO

Si A y B son dos expresiones algebraicas, entonces

$$AB = 0 \quad \text{si y solo si} \quad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

La propiedad anterior establece que el si el producto de dos factores es igual a cero, entonces al menos uno de los dos factores tiene que ser igual a cero.

Ejemplo 1: Resolviendo ecuaciones cuadráticas por factorización

Resuelva las siguientes ecuaciones por factorización

a. $x^2 - 4 = 0$ **b.** $x^2 - x - 6 = 0$ **c.** $8x^2 = 2x + 1$

Solución

a. Observe que el lado izquierdo de la ecuación se puede factorizar como una diferencia de cuadrados

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

Aplicando la propiedad del producto cero y despejando x en cada caso se tiene que

$$x-2=0 \quad \text{o} \quad x+2=0$$
$$x=2 \qquad\qquad x=-2$$

Por lo tanto las soluciones son $x=2$ y $x=-2$

b. Para factorizar un trinomio general de la forma x^2+bx+c se buscan dos números que multiplicados den c y que sumados den b.

Para factorizar, $x^2-x-6=0$, se buscan dos números que multiplicados den 6 y que sumados den -1, estos números son -3 3 ya qué $(-3)(2)=-6$ y $-3+2=-1$. Entonces

$$x^2-x-6=0$$
$$(x-\quad)(x+\quad)=0$$
$$(x-3)(x+2)=0$$

Aplicando la propiedad del producto cero

$$x-3=0 \quad \text{o} \quad x+2=0$$
$$x=3 \qquad\qquad x=-2$$

Por lo que las soluciones son $x=3$ y $x=-2$

c. Para resolver ésta ecuación se trasladan los términos al lado izquierdo para obtener la ecuación en su forma general

$$8x^2=2x+1$$
$$8x^2-2x-1=0$$

Para factorizar un trinomio de la forma ax^2+bx+c se sugiere usar el procedimiento siguiente:

Multiplique el trinomio por a y divídalo entre a ($a=8$ en el ejemplo). El trinomio se debe agrupar como se muestra a continuación

$$8x^2-2x-1=\frac{8(8x^2-2x-1)}{8}=\frac{(8x)^2-2(8x)-8}{8}$$

Ahora el trinomio se puede factorizar usando el procedimiento que se utiliza para el trinomio de la forma u^2+bu+c con $u=8x$

$$8x^2-2x-1=\frac{(8x-\quad)(8x+\quad)}{8}$$

Se buscan dos números que multiplicados den -8 y que sumados den -2. Estos números son -4 y 2.

$$8x^2-2x-1=\frac{(8x-4)(8x+2)}{8}$$

Para terminar el proceso de factorización hace falta dividir entre 8, evitando que en el proceso resulten fracciones. Observe que el primer factor es divisible entre 4 y el segundo es divisible entre 2 y como $8=(4)(2)$

$$8x^2-2x-1=\frac{(8x-4)(8x+2)}{(4)(2)}=\frac{8x-4}{4}\cdot\frac{8x+2}{2}$$
$$=(2x-1)(4x+1)$$

Ahora se iguala a cero cada factor y se despejan los valores de la incógnita.

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 0 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 4x + 1 &= 0 \\ 4x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

De donde las soluciones de la ecuación son $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{4}$

Solución por completación de cuadrados

La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se puede resolver completando un trinomio cuadrado perfecto de la forma $x^2 + 2wx + w^2$ a partir de los términos $ax^2 + bx$. El trinomio cuadrado perfecto se puede factorizar como $(x + w)^2$ y a partir de ahí es posible despejar sin mayor dificultad la incógnita de la ecuación. El procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 2: Solución completando cuadrados

Resuelva las siguientes ecuaciones completando cuadrados

a. $x^2 - 6x + 2 = 0$ **b.** $8x^2 = 4x + 1$

Solución

a. Primero se traslada el término constanta al lado derecho de la ecuación

$$x^2 - 6x = -2$$

Para completar el cuadrado se suma una constante w^2 a ambos lados de la ecuación, ésta constante es la mitad del coeficiente de x elevada al cuadado, es decir

$$w^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = (3)^2 = 9$$

Sumando 9 a ambos lados de la ecuación se obtiene para no alterarla se tiene

$$x^2 - 6x = -2$$

$$x^2 - 6x + 9 = -2 + 9$$

El lado izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto, que se puede factorizar fácilmente.

$$(x - 3)^2 = 7$$

Ahora se extrae raíz cuadrada ambos lados de la ecuación y se despeja x

$$\sqrt{(x - 3)^2} = \pm\sqrt{7}$$

$$(x - 3) = \pm\sqrt{7}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{7}$$

Por lo que la ecuación tiene dos soluciones irracionales que son

$$x = 3 + \sqrt{7} \quad \text{y} \quad x = 3 - \sqrt{7}$$

b. Trasladando todos los términos con x al lado izquierdo se tiene

$$8x^2 - 4x = 1$$

Para completar el cuadrado es necesario factorizar el coeficiente del término cuadrático, aun así queden coeficientes fraccionarios.

$$8\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) = 1$$

Ahora se suma la mitad del coeficiente de x elevado al cuadrado a ambos lados de la ecuación y se factoriza el trinomio. Como el coeficiente de x es $\frac{1}{2}$, su mitad es $\frac{1}{4}$.

$$8\left(x^2 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 1 + 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Observe que el término que se ha sumado está multiplicado por 8, esto es así porque el trinomio cuadrado perfecto también está multiplicado por ese número. Al factorizar y simplificar se obtiene

$$8\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

Para encontrar las soluciones de la ecuación se despeja x

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{3}{16}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}$$

De donde las soluciones de la ecuación son

$$x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Solución por fórmula cuadrática

Completando cuadrados en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ se obtiene una fórmula para x en términos de los coeficientes a, b, y c. Esta fórmula es conocida como fórmula cuadrática o fórmula general. Trasladando c al lado derecho y factorizando a se tiene

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto y factorizando

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = -c + a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -c + \frac{ab^2}{4a^2}$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a}$$

Ahora se puede despejar x

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$$

Ahora se puede generalizar la solución de una ecuación cuadrática como

La fórmula cuadrática

Si $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ entonces

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

La expresión b^2-4ac es llamada discriminante de la fórmula cuadrática y se utiliza para establecer la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.

El discriminante de la fórmula cuadrática

La ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ con coeficientes reales tiene como discriminante b^2-4ac.

Si $b^2-4ac>0$, la ecuación tiene dos raíces reales diferentes.

Si $b^2-4ac=0$, la ecuación tiene dos raíces racionales iguales.

Si $b^2-4ac<0$, la ecuación tiene dos raíces complejas que no son números reales.

Ejemplo 3: Solución usando la fórmula cuadrática

Resuelva las ecuaciones usando la fórmula cuadrática

a. $x^2+5x-24=0$ **b.** $3x-4=5x^2$

Solución

a. Para utilizar la fórmula general únicamente hay que establecer los valores de *a, b* y *c*, y sustituirlos en la fórmula. En este ejemplo $a=1$, $b=8$ y $c=-24$, entonces

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(5)\pm\sqrt{(5)^2-4(1)(-24)}}{(2)(1)}=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{2}$$

De donde se obtiene

$$x=\frac{-5+11}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad \text{y} \quad x=\frac{-5-11}{2}=\frac{-16}{2}=-8$$

Por lo tanto las soluciones son $x=3$ y $x=-8$

b. Para resolver la ecuación $3x-4=5x^2$ usando la fórmula general, primero hay que ordenar la ecuación para establecer correctamente los valores de los coeficientes

$$-5x^2 + 3x - 4 = 0$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por –1 para que el coeficiente principal sea positivo se tiene

$$5x^2 - 3x + 4 = 0$$

Los coeficientes de la ecuación son $a = 5$, $b = -3$ y $c = 4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(5)(4)}}{(2)(5)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 80}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{-71}}{10}$$

Como el discriminante $b^2 - 4ac = -71 < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas que son

$$x = \frac{3 + \sqrt{-71}}{10} \quad \text{y} \quad x = \frac{3 - \sqrt{-71}}{10}$$

Los números complejos serán estudiados más adelante en otra unidad y por el momento no serán utilizados.

Ejemplo 4: Solución de una ecuación con fracciones

Resuelva la ecuación

$$\frac{2}{m + 5} - \frac{m + 3}{m^2 + 9m + 20} = \frac{1}{4m - 32}$$

Solución

Factorizando cada uno de los denominadores de las fracciones

$$\frac{2}{m + 5} - \frac{m + 3}{(m + 4)(m + 5)} = \frac{1}{4(m - 8)}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores es $4(m + 5)(m + 4)(m - 8)$, al multiplicar la ecuación por el MCM se obtiene

$$\frac{4(m + 5)(m + 4)(m - 8)(2)}{m + 5} - \frac{4(m + 5)(m + 4)(m - 8)(m + 3)}{(m + 4)(m + 5)} = \frac{4(m + 5)(m + 4)(m - 8)}{4(m - 8)}$$

Eliminando los factores comunes en el numerador y denominador de cada fracción se obtiene una ecuación sin denominadores

$$8(m + 4)(m - 8) - 4(m + 3)(m - 8) = (m + 5)(m + 4)$$

Efectuando los productos entre paréntesis y sumando términos semejantes

$$8(m^2 - 4m - 32) - 4(m^2 - 5m - 24) = m^2 + 9m + 20$$

$$8m^2 - 32m - 256 - 4m^2 + 20m + 96 = m^2 + 9m + 20$$

$$3m^2 - 21m - 180 = 0$$

$$m^2 - 7m - 60 = 0$$

Al resolver la ecuación anterior por factorización se tiene

$$(m - 12)(m + 5) = 0$$

$$m = 12 \quad \text{y} \quad m = -5$$

Al hacer la prueba en la ecuación inicial se obtiene que únicamente $m = 12$ satisface la ecuación, pues para $m = -5$ uno de los denominadores es igual a 0, y como la división entre cero no está definida, $m = -5$ no es solución de la ecuación original.

Por lo tanto la única solución de la ecuación es $m = 12$.

Ejemplo 5: Aplicación de las ecuaciones cuadráticas

Un visitador médico recorre los primeros 105 kilómetros de su ruta en una hora más que los últimos 90 kilómetros. La velocidad durante los últimos 90 kilómetros fue de 10 kilómetros por hora más que durante los primeros 105 kilómetros. Obtenga las velocidades de cada parte del recorrido del visitador médico si estas son constantes.

Solución

Sea x la velocidad del primer tramo del recorrido y sea y el tiempo empleado en recorrer esa distancia. Si se organiza la información en una tabla, como ya se ha sugerido para los problemas de velocidades se tiene

	velocidad	tiempo	distancia
Tramo 1	x	y	105
Tramo 2	$x + 10$	$y - 1$	90

Al aplicar la fórmula del movimiento rectilíneo $d = vt$ a cada tramo recorrido se obtienen las ecuaciones

$$xy = 105$$

$$(x + 10)(y - 1) = 90$$

Al despejar y de la primera ecuación se tiene $y = \dfrac{105}{x}$. Sustituyendo ésta expresión en la segunda ecuación y resolviendo se tiene

$$(x + 10)\left(\frac{105}{x} - 1\right) = 90$$

$$(x + 10)\left(\frac{105 - x}{x}\right) = 90$$

$$(x + 10)(105 - x) = 90x$$

$$-x^2 + 95x + 1050 = 90x$$

$$x^2 - 5x - 1050 = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior por factorización se tiene

$$(x - 35)(x + 30) = 0$$

De donde $x = 35$ y $x = -30$ son las soluciones de la ecuación anterior. Como x representa la velocidad en el primer tramo, no puede ser negativa; razón por la cual descartamos la solución negativa.

Respuesta: La velocidad del primer tramo es de 35 km/h y la del segundo tramo de 35 + 10 = 45 km/h.

Ejercicios de la sección 1.4

En los ejercicios 1 a 10, resuelva la ecuación por factorización.

1. $x^2 - x - 30 = 0$

2. $x^2 - 17x + 60 = 0$

3. $5x^2 - 2x - 3 = 0$

4. $21x^2 - 12x - 9 = 0$

5. $4x^2 - 1 = 0$

6. $3x^2 = 6x$

7. $x(x - 7) = -12$

8. $x^2 + 3(x - 18) = 0$

9. $(x - 4)(x - 7) = x - 4$

10. $(x+6)(x-6)=5x$

En los ejercicios 11 a 15 resuelva la ecuación completando cuadrados

11. $x^2-4x-21=0$

12. $y^2-12y+27=0$

13. $5x^2-6x-8=0$

14. $9x^2+6x-15=0$

15. $4-3x-5x^2=0$

En los ejercicios 16 a 20 resolver la ecuación cuadrática utilizando la fórmula cuadrática.

16. $x^2-17x+60=0$

17. $x^2+x+1=0$

18. $3x^2-1=\dfrac{11x}{12}$

19. $5p^2-3p+1=0$

20. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{x+1}$

En los ejercicios 21 a 31 resolver la ecuación por el método que considere más conveniente. En las ecuaciones que tienen más de una variable la incógnita es x

21. $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+2}{2x}$

22. $\dfrac{p}{5}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{6}{5}-\dfrac{5}{p}$

23. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{8-x}=\dfrac{1}{8}$

24. $\dfrac{1}{u+3}+\dfrac{1}{u+2}-\dfrac{1}{u+1}=0$

25. $\dfrac{1}{m-2}+1=\dfrac{6-m}{m^2-4}+\dfrac{1}{m+2}$

26. $x+\dfrac{mn}{x}=m+n$

27. $2x(7x-a)=(a+x)(a-x)$

28. $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{b}{x-a}=2$

29. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{x}{a}=\dfrac{33a^2-x^2}{ax}$

30. $\dfrac{1}{c+d+x}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{x}$

31. $9x^2-hx+h^2=0$

En los ejercicios 32 a 39 resuelva los problemas en los el modelo es una ecuación cuadrática.

32. Encuentre dos números que sumen 23 y cuyo producto sea 78.

33. Halle dos números enteros, positivos y pares consecutivos cuyo producto sea 224.

34. Un grupo de jóvenes compro una pizza por Q70, planeando dividir el costo en partes iguales. Dos de los jóvenes se retiraron, lo que aumentó la aportación de cada uno en Q1.75. ¿Cuántos muchachos había en el grupo inicialmente?

35. A lo largo de una carretera hay postes telefónicos separados a una misma distancia. Si se hubieran colocado 2 postes menos por kilómetro, la distancia entre los postes se hubiera aumentado en 8 metros. Encuentre el número de postes por kilómetro.

36. Una lancha tarda 2 horas 8 minutos más en hacer un recorrido de 48 kilómetros contra la corriente que a favor de la corriente. Si la velocidad de la corriente es de 4 km/h, hallar la velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

37. Un hombre recorre 30 km en autobús para llegar a San Lucas y regresa en un taxi que viaja 15 km/h más rápido que el autobús. Si el tiempo total invertido en el viaje es de 1 hora con 57 minutos. Hallar las velocidades de ambos vehículos.

38. Dos barcos parten simultáneamente de puntos opuestos en un lago que distan 2.25 km y se cruzan al cabo de 6 minutos. El barco más rápido termina su recorrido en 4.5 minutos antes que el otro. Hallar las velocidades de los dos barcos.